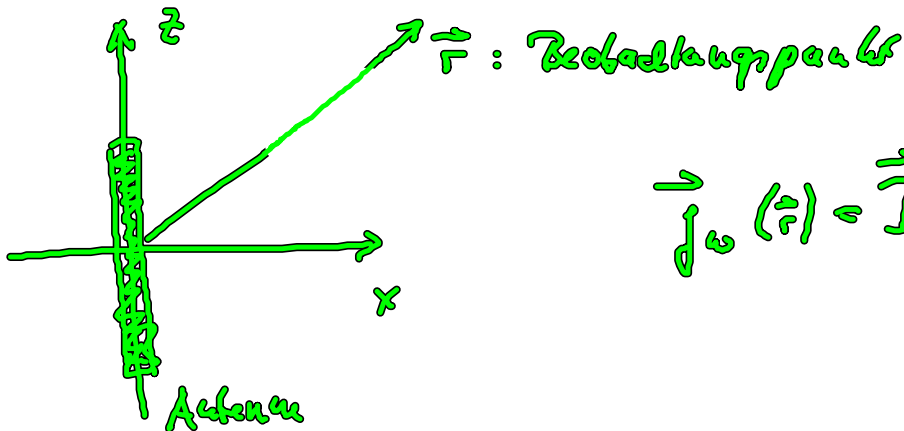


10.5. Lineare Antenne

Strahlung die von einem dünnen, stromführenden Leiter erzeugt wird (mikroskopischer Strom $\vec{j}_v = \vec{j}$)

$\vec{I}_v(z)$ sei Fourierkomponente des Stroms in Leiter



$$\vec{j}_v(\vec{r}) = \vec{I}_v(z) \delta(x) \delta(y)$$

„dünne Antenne“

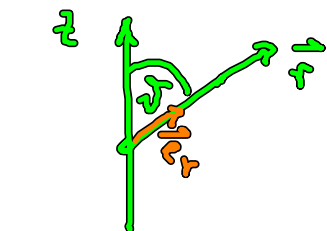
Abgestrahltes Fernfeld:

$$\vec{E}_v(\vec{r}) = \frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \underbrace{\frac{e^{ikr}}{r}}_{\text{Kugelfunktion}} \int d\vec{r}' \underbrace{\vec{j}_v(\vec{r}')}_{\text{Fourierkomponente}} e^{-i \underbrace{\vec{e}_r \cdot \vec{r}' k}_{kr' \cos\theta}}$$

$$k \vec{e}_r \cdot \vec{r}' = kr' \cos\theta$$

Fourierkomponente

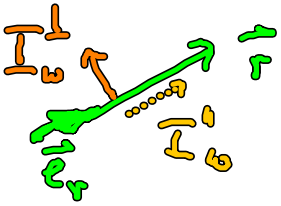
$$(ck = \omega)$$



↓ $2L = \text{Ausstrahlungswinkel der Antenne}$

$$\int d^3 r' \frac{\vec{I}_\omega^\perp(\vec{r}')}{r'^2} = \int_{-L}^L dz' \underbrace{\vec{I}_\omega^\perp(z')}_{\substack{\text{dünnes Antenna} \\ 1}} \int dx \int dy \delta(x') \delta(y')$$

$$\vec{I}_\omega^\perp(z') = \vec{I}_\omega(z') - \underbrace{\vec{e}_r (\vec{e}_r \cdot \vec{I}_\omega(z'))}_{I_\omega^{\parallel}}$$



$$= \vec{I}_\omega(z') - \vec{e}_r \left(\frac{\vec{r} \cdot \vec{I}_\omega(z')}{r} \right) \quad \begin{array}{l} \vec{I}_\omega = I_\omega \vec{e}_2 \\ \vec{r} \cdot \vec{e}_2 = r \cos\vartheta \end{array}$$

$$= \vec{I}_\omega(z') - \vec{e}_r I_\omega(z') \cos\vartheta$$

$$= I_\omega(z') \vec{e}_2 - I_\omega(z') \cos\vartheta \vec{e}_r$$

Übergang zu kartesischen Koordinaten

am $\frac{\vec{r}}{r}$ in Kugelkoordinaten

$$= I_\omega \cdot (0, 0, 1) - I_\omega \cos\vartheta (\sin\vartheta \cos\varphi, \sin\vartheta \sin\varphi, \cos\vartheta)$$

$$= I_\omega (-\sin\vartheta \cos\varphi \cos\vartheta, -\sin\vartheta \sin\varphi \cos\vartheta, 1 - \cos^2\vartheta)$$

$$= -\vec{I}_0 \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$$

↑ Darstellung v. \vec{e}_ϑ in Kugelkoordinaten

$$\vec{E}_0 = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int_{-L}^L dz' \vec{I}_0(z') e^{-ikz' \cos\vartheta} \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$$

Beschreibung d. durch Antenne in Fernfeld

Shon? hängt ab v. Antennenspannung (Spannung) und Form d. Antenne

Shon (o.B.) im Fernfeld gültig mit

Randbedingungen erfüllt:



$$\frac{d^2}{dz^2} \vec{I}_0(z) = -k^2 \vec{I}_0(z)$$

unrealistisches Beispiel: konstante Shon $\vec{I}_0(z) \equiv \vec{I}_0$

$$\vec{E}_0 = -\frac{i\omega\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \vec{I}_0 \frac{2}{k \cos\vartheta} \sin(kL \cos\vartheta) \sin\vartheta \vec{e}_\vartheta$$

$$I_{\text{angie}} \sim |\vec{E}_0|^2 \propto \frac{\sin^2 \vartheta \cos^2(kL \cos \vartheta)}{r^2}$$

↑
Intensitätsquadrat

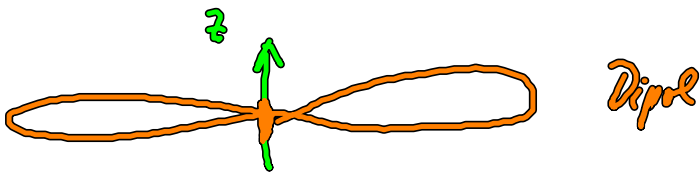
Bemerkungen:

a) Intensität $\sim \frac{1}{r^2}$ typ. Zeichen einer abgestrahlten Wellen

b) \exists eine Abstrahlcharakteristik die von ϑ abhängt (komplexiert)

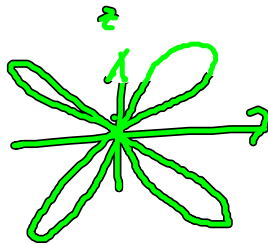
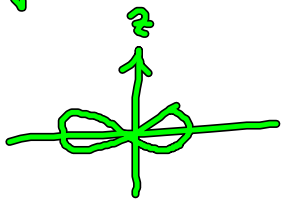
c) sehr kleiner Antennen: $kL \rightarrow 0$ ($L \rightarrow 0$)

$$I_{\text{Intensität}} \propto \frac{\sin^2 \vartheta}{\cos^2 \vartheta} (kL \cos \vartheta)^2 = (kL)^2 \sin^2 \vartheta$$

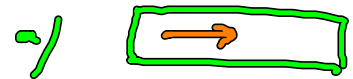


d) $kL = 2\pi \frac{L}{\lambda}$ oder Abhängig. kL kann größer

f. höherer $n \Rightarrow$



11. Ausbreitung von Wellen in Medien



Fourierdecksche und Fresnelsche Formeln



11.1. Wellengleichung in Medien

unendlich ausgedehntes Medium, Grenzfläche spielt keine Rolle

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \partial_t \vec{B}$$

$$(2) \quad \vec{\nabla} \times \vec{B} = \underbrace{\mu_0 (\vec{j}_a + \partial_t \vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M})}_{\mu_0 \text{ Lokale Stromdichte}} + \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$$

$$(1) \quad \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = - \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

$$(\vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot - \Delta) \vec{E} = - \mu_0 (\partial_t \vec{j}_a + \partial_t^2 \vec{P} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{M}) - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 \vec{E}$$

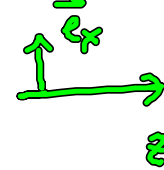
Wellengleichung in Medien:

$$\underbrace{(\Delta - \frac{1}{c^2} \partial_t^2 - \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot)}_{\text{Laplace-Operator}} \vec{E} = \underbrace{\mu_0 (\partial_t \vec{j}_a + \partial_t^2 \vec{P} + \partial_t \vec{\nabla} \times \vec{M})}_{\text{Quelle d. } \vec{E}\text{-Feldes}}$$

Laplace-Operator

Quelle d. \vec{E} -Feldes

(Kabel, Licht, Kapazitäten)

feld: ebene Wellen: $\vec{E}(z) e^{ikz} \vec{e}_x$: 

$$\rightarrow \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \quad (\text{gilt f. wellen stat. f. wellen felds})$$

11.2. Mikroscopische Ursprung d. Brechzahl

Dichtheit (\vec{P}), 1 Komplex: x -Komplex d. Felds

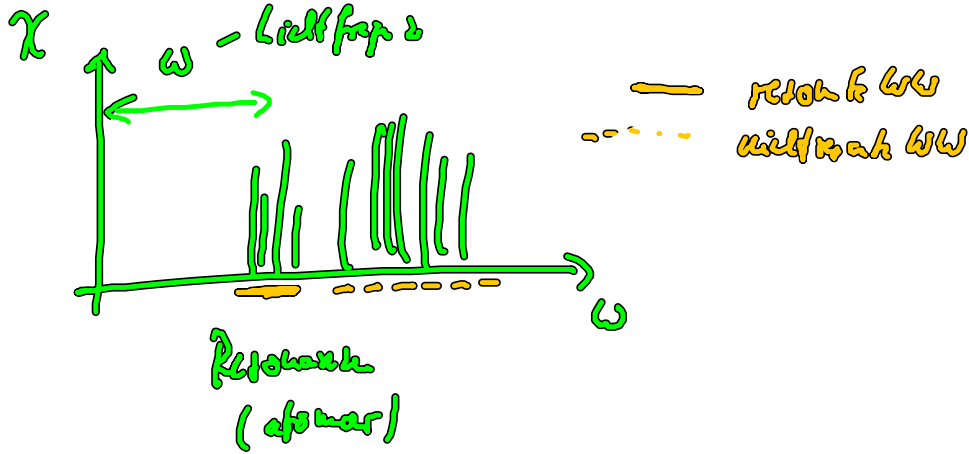
Ansatz: $\vec{P}_\omega = \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega$

\uparrow
 Suszeptibilität, wird gleich betrachtet,
 ist f. linear Opt. allgemein gültig
 (ohne räumliche Dispersion)

$$\nabla_z^2 \vec{E}_\omega + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E}_\omega = -\mu_0 \omega^2 \vec{P}_\omega = \underline{\underline{\mu_0 \omega^2 \epsilon_0 \chi(\omega) \vec{E}_\omega}}$$

$$\left(\nabla_z^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \underbrace{(1 + \chi(\omega))}_{n^2(\omega)} \right) \vec{E}_\omega = 0$$

Brechzahl, frequenzabhängig



11.3. Ausbreitung einer Welle in Medien

als verlustlos (positive ϵ -Rechte)

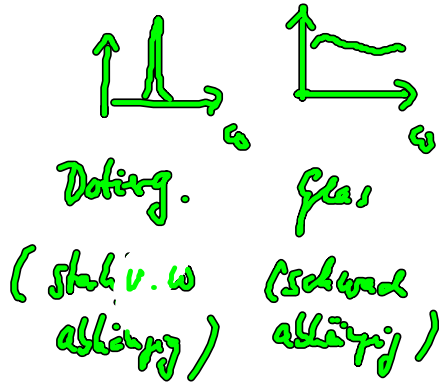
$$\vec{E}(z, t) = \sum_{\omega} \underbrace{\vec{E}_{\omega}^0 e^{\pm i \frac{\omega}{c} z}}_{\text{Licht Wgt. in } z\text{-Raum}} e^{\underbrace{-i\omega t}}_{\text{Rücklauf in Zeit}} = \sum_{\omega} \vec{E}_{\omega}^0 e^{-i\omega \left(t - \frac{z}{c(\omega)} \right)}$$

\vec{E}_{ω}^0 - Anfangsbedingung auf. Licht geht in $z=0$

c_{ω} : Lichtgeschw. in Medium $\frac{c}{n(\omega)} \equiv c_{\omega}(\omega)$

Wellenausbreitung in Dichtem wird durch Brechzahl beeinflusst

$$n = \sqrt{1 + \chi} = \sqrt{1 + \chi_r + \chi_{ir}}$$



$$\chi_{ur} \gg \chi_r$$

$$u \approx \sqrt{1 + \chi_{ur}} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{1 + \chi_{ur}} \right) = u_{ur} + \frac{1}{2} \frac{\chi_r}{u_{ur}}$$

1. Ordng Taylor der $\sqrt{\quad}$

für $z=0$: E_{ω}^0 vorgeben

$$E_{\omega} = E_{\omega}^0 e^{i \frac{\omega}{c} u(\omega) z - i \omega t}$$

$$|E_{\omega}|^2 = |E_{\omega}^0|^2 e^{-\frac{\omega}{c u_{ur}} \text{Im}(\chi_r) z}$$

$u_{ur} = \text{reell}$, $\chi_r = \text{komplex}$.

Lambert-Beer sche
Absorb. gesetz

$$|E_{\omega}|^2 = |E_{\omega}^0|^2 e^{-kz}$$

$$k = \frac{\omega}{c u_{ur}} \text{Im}(\chi_r)$$

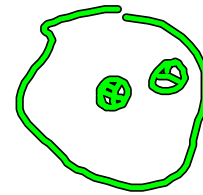
ist eine Absorb. Länge

wo quadrat?

a/ Dichtete

$$P_u = \epsilon \chi(\omega) E_u$$

Zerlegung



1 Zelle aben

$$\ddot{P}(z,t) + p_0 \dot{P}(z,t) + \omega_0^2 P(z,t) = u_0 \frac{q^2}{\epsilon} E(z,t)$$

Math. pr. f. Dicks- (Pipeldicke)

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 u_0}{\epsilon \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i\omega p_0}$$

$$\text{an } P_u = \epsilon \chi(\omega) E_u$$

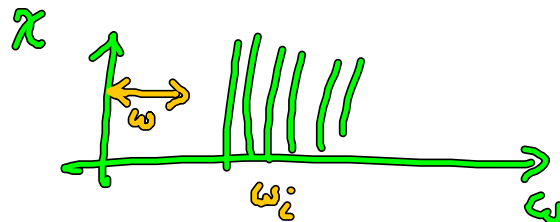
Methodik aben, i (viele Oszillatoren) p_i - Dämpfung

$$\chi(\omega) = \sum_i \frac{q^2 u_0}{\epsilon \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_i^2 - i\omega p_i}$$

q - El.-Lad.
 u - El.-Ausl.

i : Nummer der Elektro / Oszillatoren

(i) nichtresonante Beibg:



$$\omega_i \gg \omega$$

$$\chi_{nr}(\omega) = \sum_i \frac{q^2 u_0}{\epsilon \epsilon_0 \omega_i^2} = \text{konst}$$

$$n_{nr} = \sqrt{1 + \chi_{nr}} \text{ ist konst}$$

→ Konstant bzw. schwach v. ω abhängige Brechzahl

(ii) monotoner Beitrag

Eichknoten / 1 Ω-Übergang

$$\chi(\omega) = \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0} \frac{1}{-\omega^2 + \omega_0^2 - i \nu \omega}$$

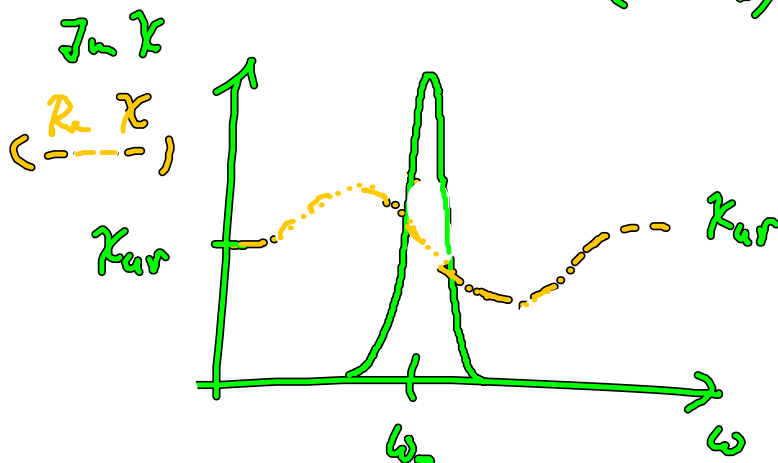
$$\omega \approx \omega_0 \rightarrow \omega_0^2 - \omega^2 = (\omega_0 - \omega)(\omega_0 + \omega) \approx 2\omega_0$$

$$\chi(\omega) \approx \frac{q^2 u_0}{m \epsilon_0 2\omega_0} \frac{1}{(\omega_0 - \omega) - i \frac{\nu}{2}}$$

Anfall in $2/\sqrt{m}$

$$\chi_r(\omega) = \frac{q^2 u_0}{2 m \epsilon_0 \omega_0} \frac{i \frac{\nu}{2} + (\omega_0 - \omega)}{(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\nu^2}{4}}$$

nach Bruchteil Real Teil $\sim \frac{\nu}{2}$

$$(\omega - \omega_0)^2 + \frac{\nu^2}{4}$$


- In X ist konstant gepickt
- In X zeigt zu 100% Dispersion
- In $X \sim k \sim p_0 \rightarrow$ man erhält Absolut durch die Dämpfung der Schwingung in Dielektrikum

b) Metalle

Licht über Strom j_m besteht
+ ohmsch feld

Trick: $j_m = \partial_t P$

$$P_0 = \epsilon_0 X(\omega) \bar{E}_0 \stackrel{\text{Metalle?}}{=} ?$$

$$j_m = \sigma(\omega) \bar{E}_0, \quad j_m = -\gamma \omega P_0$$

$$\sigma(\omega) = -i \omega \epsilon_0 X(\omega)$$

X f. Metalle? $\omega_0 \rightarrow 0$ (kein richtföhrer Kraft f. Metallkorn)

Spezialfall: $p_0 = 0$
(überwacht!)

$$\chi_{\text{Metall}} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad \omega_{pe}^2 = \frac{q^2 n_0}{m \epsilon_0}$$

$$u = \left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)^{1/2}, \text{ f. } \omega < \omega_p: \quad \text{Plasmafrequenz } \omega_p$$

$$|E_w|^2 = E_0^2 e^{2\frac{\omega}{c} \operatorname{Im}(u) z}$$

$$= \underline{\underline{E_0^2 e^{-\frac{2z}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}}}}$$

Welle klingt ab auf ohne Dämpfung d.

Reflexion: es wird ungedämpfte

Plasma-schwingung in Metall erzeugt und

diese entzieht dem Feld die Energie.