

# Zusammenfassung letzte VL

Analogie rel. Mechanik  $\leftrightarrow$  Elektrodynamik

$$x^\mu = (ct, \underline{r}) \quad (-) \quad j^\mu = (c\rho, \underline{j})$$

$$t \leftrightarrow \rho$$

$$\underline{r} \leftrightarrow \underline{j}$$

$$x' = (x - v_x t) \gamma \quad \leftrightarrow \quad j' = (j_x - v_x \rho) \gamma$$

$$c t' = (ct - \frac{v_x}{c} x) \quad \leftrightarrow \quad c \rho' = (c\rho - \frac{v_x}{c} j_x) \gamma$$

Ansagen: Tutorien + Klausur s. Webseite

## Das Viererpotential

Wenn  $E, B$  nicht Lorentz invariant sind,  
dann sind es vermutlich die Potentiale  $A, \varphi$   
auch nicht!

Betrachten wir die Gleichn in Lorentz eichung

$$\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{A} = 0 \right)$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \Delta \right) \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \partial_\nu \partial^\nu \phi = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} - \Delta \right) \underline{A} = \underline{j} \Rightarrow \partial_\nu \partial^\nu A^i = \mu_0 j^i$$

Das ist der vierdimensionale Laplace (aka d'Alembert Operator)

$$\square \equiv \partial_\alpha \partial^\alpha = \frac{\partial^2}{\partial x^0{}^2} - \nabla^2, \text{ dieser ist Lorentzinvariant}$$

Weil'

$$\partial_\alpha \partial'^\alpha = \Omega_{\alpha}^{\nu} \partial_\nu \Omega_{\nu'}^{\alpha} \partial^{\nu'} = \partial_\nu \partial^\nu !$$

$\swarrow \quad \searrow$   
 $\delta_{\nu\nu'}$

Zusätzlich gilt in jeder IS  $\left( \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \nabla \cdot \underline{A} = 0, \text{ separiert!} \right)$   
 Beweis analog zur Kontigl.

Wir kombinieren das

$$A^\alpha = \left( \frac{\phi}{c}, \underline{A} \right)$$

Bemerkung  
 $j^\alpha = (c\rho, j^x, j^y, j^z)$

$$\| \partial_\nu \partial^\nu A^\alpha = \mu_0 j^\alpha \|$$

Damit gelten die Potentialgleichungen in jedem Inertialsystem.

Es bleiben noch die Felder  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$ !

Feldtensoren und Maxwellgl. in Vierervektorweise

$\underline{E}$  und  $\underline{B}$  sind <sup>nicht</sup> Lorentzinvariant. Wir müssen eine neue Größe finden, die  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  beinhaltet und Lorentzinvariant ist!

Analogie:  $\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$

$\| F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \|$  Feldtensor

Zur Erinnerung  $\partial^\mu = (\partial_{ct}, -\nabla)$  sowie  $A^\mu = (\frac{\phi}{c}, \underline{A})$

Was sind die Elemente von  $F^{\mu\nu}$ ?

Beispiele

$$F^{10} = -\partial^1 A^0 + \partial^0 A^1 = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\phi}{c} + \frac{\partial}{\partial(ct)} A^x = -\frac{1}{c} E_x$$

$$F^{21} = -\partial^2 A^1 + \partial^1 A^2 = +\frac{\partial}{\partial y} A^x - \frac{\partial}{\partial x} A^y = -B_z$$

Ergo:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

Der Feldstärke tensor ( $F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$ ) ist antisymmetrisch

Er ist aus zwei Viervektoren aufgebaut  $\partial^\mu$  und  $A^\nu$  und damit Lorentztensor

$$F^{\mu\nu} = \Omega^\mu_\alpha \Omega^\nu_\beta F^{\alpha\beta}$$

Jetzt Maxwellgl. aus Potentialgleichung ableiten!

$$F^{\mu\nu} = -\partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu \quad | \partial_\mu \text{ (Summation)}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu \underbrace{\partial_\mu A^\mu}_0$$

|| ← Kontreidung

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\partial_\mu \partial^\mu A^\nu \stackrel{\pi}{=} -\mu_0 j^\nu$$

(Erinnerung: Potentialgl.)

$$\partial_\mu \partial^\mu A^\nu = \mu_0 j^\nu$$

||  $\partial_\mu F^{\mu\nu} = -\mu_0 j^\nu$  || Maxwellgl. in  
Vierstreifweis  
Auswertung der einzelnen Komponenten ergibt:

$$\left\| \begin{array}{l} \nabla \cdot \underline{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \underline{B} = \mu_0 \underline{j} + \frac{1}{c^2} \partial_t \underline{E} \end{array} \right\| \text{Maxwellgl.}$$

Die anderen Maxwellgl. stem aus (Jacobi Identität)

$$\| \partial^\lambda F^{\mu\nu} + \partial^\nu F^{\lambda\mu} + \partial^\mu F^{\nu\lambda} = 0 \| \text{ (ohne Beweis)}$$

↑  
bekannt als Determinante mit  $\lambda, \mu, \nu = 0, 1, 2, 3$   
(dreierwahl)

Daraus gibt es:  $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ ,  $\nabla \times \underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

(im wesentlichen folgt dies aus der Verknüpfung von  
Potentialen und Feldern)

Wichtig: Die Aufteilung von  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  ist abhängig von Bezugssystem.  $\underline{E}$  und  $\underline{B}$  werden zu „elektromagnetisches Feld“ (zusammengefasst) und sind echte Eichf. Der Lorentz tensor  $F^{\alpha\beta}$  stellt das elektromagnetische Feld dar, in einer Form die zwischen KS Lorentz transformierbar ist.

Wie transformieren sich die Felder?

Bis jetzt kann wir als Transformationsregel

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}, \quad j'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} j^{\nu}(x)$$

$$A'^{\mu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\nu} A^{\nu}(x), \quad F'^{\mu\nu}(x') = \Lambda^{\mu}_{\sigma} \Lambda^{\nu}_{\rho} F^{\sigma\rho}(x)$$

Zur Erinnerung  $\Sigma \rightarrow \Sigma'$  für Bewegung entlang einer Richtung

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{mit } \beta = \frac{v_x}{c}$$

Anwendung auf  $F^{30}$  und  $F'_{30}$

$$E_x' = E_x, \quad E_y' = \gamma(E_y - \beta c B_z), \quad E_z' = \gamma(E_z + \beta c B_y)$$

$$B_x' = B_x, \quad B_y' = \gamma(B_y + \beta \frac{E_z}{c}), \quad B_z' = \gamma(B_z - \beta E_y / c)$$

Wir sehen klar das magnetisch und elektrisches Feld von der Wahl des Beobachter abhängt.

Struktur von  $F^{\mu\nu}$  vereinfacht Umrechnung.

Exkurs: Lagrange für relativistische Teil

Zur Erinnerung

$$\gamma = (1 - \beta^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\left\| \frac{d}{dt} \gamma m \underline{v} = q (\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}) \right\|$$

Formulierung mit Potentials

$$\underline{E} = -\nabla \phi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}$$

$$\begin{aligned} q \underline{v} \times \underline{B} &= q \underline{v} \times (\nabla \times \underline{A}) \\ &= q (\nabla (\underline{v} \cdot \underline{A}) - (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{A}) \end{aligned}$$

Bemerkung:  $\frac{dA(\underline{v})}{dt} \stackrel{\text{Feldimpuls}}{=} \underline{v} \cdot \nabla A + \frac{\partial A}{\partial t}$

$$\left\| \frac{d}{dt} (\gamma m \underline{v} + q \underline{A}) = -q \nabla (\phi - \underline{v} \cdot \underline{A}) \right\| \quad \#$$

$\rho(x, t)$

Generalisierter Impuls

Beispiel

$$\gamma = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\| \mathcal{L} = -\frac{m c^2}{\gamma} - q (\phi - \underline{v} \cdot \underline{A}) \| \text{ relativistische}$$

Lagrange-Fkt.

für Teilchen in einem  
Feld

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} = \gamma m v^i + q A_i$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = -q \frac{\partial}{\partial x^i} (\phi - \underline{v} \cdot \underline{A})$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0 \quad \text{gibt } \textcircled{\#}$$

Lagrange Dichte für Maxwellfelder

Behauptung

$$\| \mathcal{L} = -\frac{1}{4 \mu_0} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} - j_\alpha A^\alpha \|$$

ist die relativistische Fassung:

$$h = \underbrace{\frac{1}{2 \mu_0 c^2}}_{\frac{1}{2 \epsilon_0}} |E|^2 - \frac{1}{2 \mu_0} |B|^2 + \phi(\underline{r}) \rho(\underline{r}) - \underline{j}(\underline{r}) \cdot \underline{A}(\underline{r})$$

Lagrange-Feldgleichung

$$\| \partial_\nu \frac{\partial h}{\partial (\partial^\nu A^\mu)} = \frac{\partial h}{\partial A^\mu} \|$$

$$h = -\frac{1}{4 \mu_0} (\partial_\lambda A_\nu - \partial_\nu A_\lambda) (\partial^\lambda A^\nu - \partial^\nu A^\lambda) - j_\alpha A^\alpha$$

$$\frac{\partial h}{\partial (\partial^\mu A^\nu)} = \frac{1}{\mu_0} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \text{ und } \frac{\partial h}{\partial A^\nu} = \hat{j}_\nu$$

$$\Rightarrow \partial^\mu \frac{1}{\mu_0} F_{\mu\nu}(x) = \hat{j}_\nu$$

$$\| \partial^\mu F_{\mu\nu}(x) = \mu_0 \hat{j}_\nu \|$$

Maxwellgl. in relativistischer Formung  
reproduziert.