weitere Themen (in etwa)

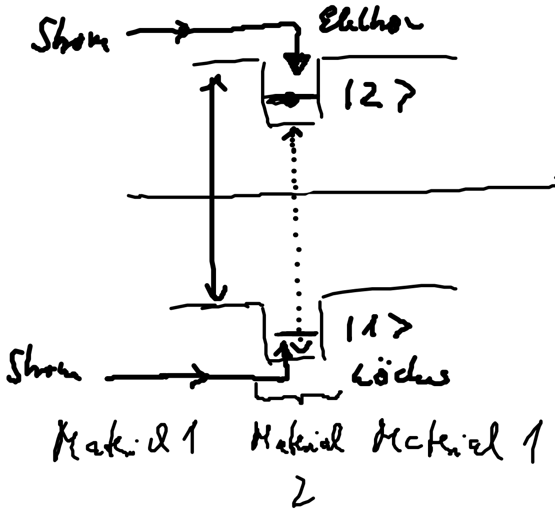
1. VL : Laser
2. VL : Quantisierung d. elektromagnetisch Felds
3. VL : kohärente Zustände und Elektrodynamik
4. VL : nichtlinear Optik

gehören nicht zum Kanon,
aber zur Allgemeinbildung

Zusatz I : Laser – die einfachst mgl. Beschreibung

1. Lasermodell

(i) Potentialtopf / Molekül



z.B.

Halbleiterlaser: Quantentöpfe

Änderung der Bandlücke

optisch aktiver Zustand z.B. im Kastenpotential

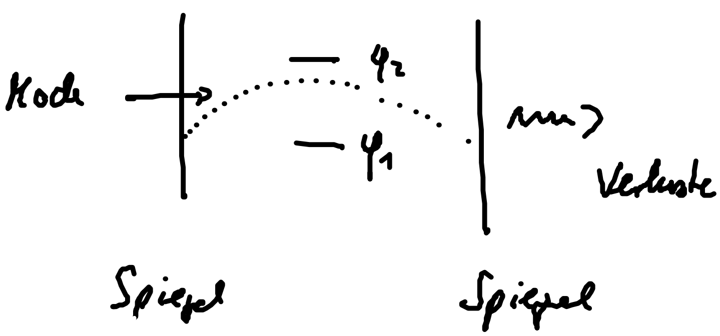
$$H_0 \varphi_n = \varepsilon_n \varphi_n \nearrow \varepsilon_1, \varepsilon_2 \quad \varphi_1, \varphi_2$$

ohne Licht

$$(\varphi_n, |n\rangle)$$

Materie

(ii) Maxwellgl. im Resonator



Maxwellgleichungen unter RB der Spiegel

$$(\Delta + \underbrace{k^2}_{=\frac{\omega^2}{c^2}}) w(\vec{r}) = 0$$

$w(\vec{r})$: Modenfunktion

(1 Mode)

(iii) Kopplung d. ZNS und Resonator

gekoppelte $\underbrace{\text{Feld}}_{\text{klassisch}}$-$\underbrace{\text{Material}}_{\text{quantisiert}}$gleichungen $\hat{=}$ halbklassisch

2.) Gleichung f. das $\vec{E}$-Feld

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \ddot{\vec{P}} + \mu_0 \dot{\vec{j}}$$

Zweiniveausystem

Verlust über ohmsche Gesetz

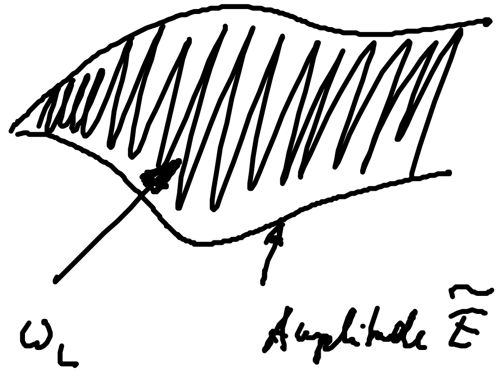
+ Randbedingungen

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r},t) = w(\vec{r})\, e^{-i\omega_L t}\, \tilde{\vec{E}}(t)$

ein Mode (stehende Welle)

Frequenz d. Lichts

langsame Amplitude



skalare Theorie

$$\partial_t E = \partial_t\left(\tilde E e^{-i\omega_L t}\right) = \partial_t \tilde E \, e^{-i\omega_L t} - i\omega_L e^{-i\omega_L t} \tilde E$$

$$\partial_t^2 E = \left(\cancel{\partial_t^2 \tilde E} - 2i\omega_L \partial_t \tilde E - \omega_L^2 \tilde E\right) e^{-i\omega_L t}$$

$$\partial_t^2 \tilde E \ll \omega_L \partial_t \tilde E$$

$$\Delta w(\vec r) = -k^2 w(\vec r)$$

linke Seite Wellengleichung:

$$\Box E = \Big(\underbrace{-k^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2}}_{=0 \text{ Dispersions-relation}} + \frac{2i\omega_L}{c^2}\partial_t\Big) \tilde E(t)\, e^{-i\omega_L t} w(\vec r)$$

rechte Seite der Wellengleichung:

$$P = \tilde P(\vec r, t)\, e^{-i\omega_L t}$$

$$\partial_t^2 P = \dots -\omega_L^2 \tilde{P}(\vec r,t)\, e^{-i\omega_L t} \dots$$

ist der dominante Term $\left(\partial_t^2 \tilde{P} \ll \omega_L^2 \tilde{P}\right)$

$$\partial_t j = -i\omega_L \tilde{j}\, e^{-i\omega_L t} = -i\omega_L\, \sigma\, \tilde{E}(t)\, w(\vec r)\, e^{-i\omega_L t}$$

ohmsches Gesetz
$\sigma \mathrel{\hat=}$ Leitfähigkeit

$$\mu_0 \ddot{P} + \mu_0 \dot{j} \longrightarrow -\mu_0 \omega_L^2 \tilde{P}(\vec r,t) - i\mu_0 \sigma \omega_L \tilde{E}(t)\, w(\vec r)\, e^{-i\omega_L t}$$

---

alle einsetzen:

$$\partial_t \tilde{E}(t) w(\vec r) = \frac{c^2 \mu_0}{2 i \omega_L}\left(-\omega_L^2 P(\vec r,t) - i\,\omega_L\, \sigma\, \tilde{E}(t) w(\vec r)\right)$$

multiplizieren $w^*(\vec r)$ und nutze: $\int d^3r\, w^*(\vec r)\, w(\vec r) = 1$

$c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t \tilde{E}(t)}_{\substack{\text{zeitliche Dynamik}\\ \text{d. E-Felds}\\ \text{im Resonator}}} = i\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0} \underbrace{\int d^3r\, w^*(\vec r)\, \tilde{P}(\vec r,t)}_{\substack{\tilde{P}_w(t)\ \text{Projektion d. Dipols}\\ \text{auf Lasermode}\\ \text{(treibt E-Feld)}}} - \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tilde{E}(t)}_{\text{Verluste}}$$

$$\partial_t \tilde{E}(t) = i\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0} \underbrace{\tilde{P}_w(t)}_{} - \kappa\, \tilde{E}(t)$$

3.) Quantenmechanik d. atomaren Dipols

$$P(\vec{r},t) = \underbrace{d(t)}_{\langle q\vec{r}\rangle} \delta(\vec{r})$$

$\langle q \vec{r} \rangle$ Erwartungswert d. Dipols

Ortsoperator

$$\Psi(\vec{r},t) = c_1(t)\,\varphi_1(\vec{r}) + c_2(t)\,\varphi_2(\vec{r})$$

Zweiniveausystem

$$P(t) = \langle \Psi(r,t) |\, q r \,| \Psi(\vec{r},t)\rangle\, \delta(\vec{r})$$

$$= \sum_{\substack{m,m' \\ \text{über } 1,2}} c_m^* c_{m'} d_{mm'}\, \delta(\vec{r})$$

$$d_{mm'} = \int d^3r\, \varphi_m^*(\vec{r})\, \vec{r}\, \varphi_{m'}(\vec{r})$$

Dipolmoment

brauche $c_1(t)$, $c_2(t)$.

$$i\hbar\, \partial_t \Psi = \Big(\underbrace{H_0}_{\text{atomarer Hamiltonian}} - \underbrace{q\, r\, E}_{\text{Dipol-WW}} \Big) \Psi$$

wird gewählt um c's zu bestimmen

Koeffizientgleichung f. c_1, c_2 ableiten

1) $\Psi = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$ einsetzen

2) mit φ_1^* bzw φ_2^* multiplizieren

3) $\int d^3 r$ nehmen und $\int d^3 r\, \varphi_i^* \varphi_j = \delta_{ij}$ nutzen

$H_0\, \varphi_{1/2} = \varepsilon_{1/2}\, \varphi_{1/2}$

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\, \dot{c}_2(t) &= \varepsilon_2\, c_2(t) - d_{21}\, E(t)\, c_1(t) \\ i\hbar\, \dot{c}_1^*(t) &= -\varepsilon_1\, c_1^*(t) + d_{21}\, E(t)\, c_2^*(t) \end{aligned}\right\} \quad d_{11} = d_{22} = 0$$

daraus kann $c_1^* c_2$ gebildet werden

(auch $c_2^* c_1$) um $\tilde{\rho}(t)$ zu ermitteln

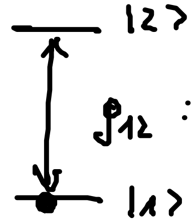
$$\rho_{12} = c_1^* c_2$$

$$i\hbar\, \dot{\rho}_{12} = i\, \omega_{12}\, \rho_{12} + i\, (\rho_{11} - \rho_{22})\, \frac{d_{21} E(t)}{\hbar}$$

mit $\rho_{11} = c_1^* c_1$

$\rho_{22} = c_2^* c_2$

Interpretation:



ρ_{12} : beschreibt die Superposition „Übergangswahrscheinlichkeitsamplitude"

Wahrscheinlichkeit Elektron in $|\varphi_1\rangle$ zu finden $\leftarrow \rho_{11}$

„Besetzungswahrscheinlichkeit", ρ_{22} analog

Kopplung v. $\rho_{12} \sim \rho_{11}, \rho_{22}$

$$\underbrace{\Delta(t) = \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t) \quad \text{Inversion}}_{\text{Unterschied zum klassischen Oszillator}}$$

Gleichg. f. $\Delta(t)$ auch ableitbar

1) Ansatz f. Amplitude $\rho_{12} = \tilde{\rho}_{12}\, e^{-i\omega_L t}$

2) Feld ist mit Resonator in Resonanz $\boxed{\omega_L = \omega_{21}}$

3) $\frac{d_{21}}{t_1} \tilde{E}(t) w(0) \equiv \frac{d_{21}}{t_1} \sqrt{\frac{t_1 \omega_L}{2\varepsilon_0}} w(0)\, b(t)$

einfüh. $\tilde{E}(t) \to b(t)$

dimensionsloses Feld (klassisch)

4. Zusammenfassg. d. Lasergleichungen

$\partial_t \tilde{E}(t) \cdots \longrightarrow$

mit $g^* = \sqrt{\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0 t_1}} \cdot (-i)\, d_{12} w^*(0)$

$p = \rho_{12}$

$\partial_t b(t) = -\kappa\, b(t) + i g^* p(t)$

Verluste — Antrieb E-Feld d. Dipol

$\partial_t p(t) = i g\, \Delta(t)\, b(t) - \gamma\, p(t)$

Antrieb Dipol d. Feld — Dämpfung d. Dipol (reingeschrieben)

$\partial_t \Delta(t) = 2ig\left(p(t) b^*(t) - p^*(t) b(t)\right)$

Antrieb Inversion d. Dipol und Feld

$-\Gamma(\Delta(t) - \Delta_0)$ Pumpe $\to \Delta_0$

Γ: Pumprate, g: Kopplungskonst. $\sim$ Dipolmoment

$\longrightarrow$ gekoppelte Syst. v. Gleichungen (3)

5. Lösung der Lasergleichungen

unter Approximation

a) schnelle Phasenrelaxation

$\dot{p} \ll \gamma p$ starke Dämpfung $\rightarrow \dot{p} = 0$

$$p(t) = \frac{ig\,\Delta(t)\,b(t)}{\gamma}$$

$$\dot{b} = -\kappa b - \frac{g^2 b}{\gamma}\Delta$$

$$\dot{b}^* = -\kappa b^* - \frac{g^2 b^*}{\gamma}\Delta$$

$n = b^* b$ interessiert, weil $\sim$ Intensität (Photonzahl)

$$\boxed{\dot{n}(t) = -2\kappa\, n(t) - w\, n(t)\,\Delta(t)}$$

$$w = \frac{2g^2}{\gamma}$$

Photonzahlgleichung

$$\boxed{\dot{\Delta}(t) = -2w\,n(t)\,\Delta(t) - T\,(\Delta(t) - \Delta_0)}$$

Inversionsgleichung.

2) Stationäre Lösung (Approx.)

$\dot{n} = 0, \quad \dot{\Delta} = 0$

$0 = -2\kappa n - w n \Delta \quad , \quad 0 = -2 w n \Delta - T(\Delta - \Delta_0)$

$\Delta = \dots$

und einsetzen links

$\Delta = \dfrac{T \Delta_0}{(2wn + T)}$

umstellen in 1. Gleichung für n

$0 = n\left(-2\kappa - w \dfrac{T \Delta_0}{2wn + T}\right)$

Gleichung für n, die Photonzahl

2 Lösungen:

(i) $n_1 = 0$ (links)

(ii) $-2\kappa(2wn + T) = w T \Delta_0$ (Klammer rechts)

$n_2 = \dfrac{w \Delta_0 + 2\kappa}{-4\kappa w} \cdot T > 0$

Forderung

nur für $\Delta_0 < 0$

und $w|\Delta_0| > 2\kappa$

$\Delta_0 < 0$ heißt mehr El. oben als unten

$$\Delta_0 = \rho_{11}^{0} - \rho_{22}^{0} < 0$$

Die äußere Pumpe Δ_0 muß die Verluste (2κ) überwinden.