weitere Themen (in etwa)

1. VL : Laser

2. VL : Quantisierung d. elektromagnetischen Feldes

3. VL : kohärente Zustände und Elektrodynamik

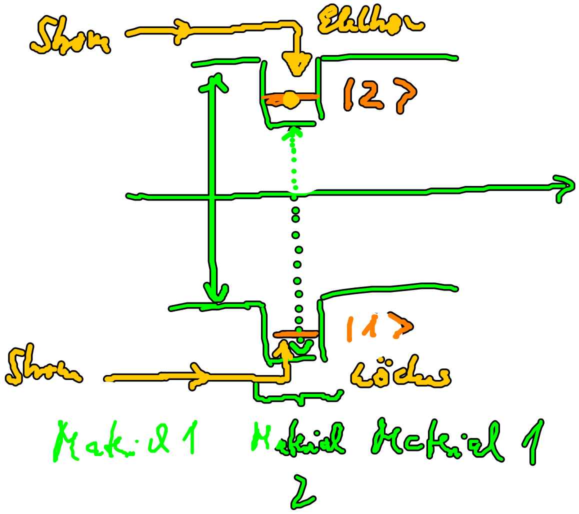
4. VL : nichtlineare Optik

gehören nicht zum Kanon,
aber zur Allgemeinbildung

Zusatz I : Laser – die einfachste mögl. Beschreibung

1. Lasermodell

(i) Potentialtopf / Molekül



z.B.

Halbleiterlaser: Quantentöpfe

Änderung der Bandlücke

optisch aktiv Zustände z.B. in Kastenpotential

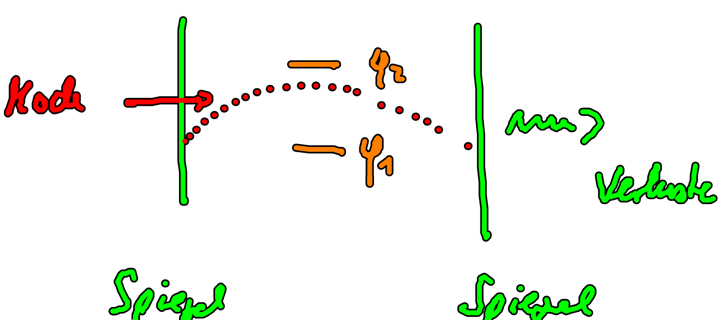
$$H_0 \varphi_n = \mathcal{E}_n \varphi_n \rightarrow \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \quad \varphi_1, \varphi_2$$

ohne Licht

$$(\varphi_n, |n\rangle)$$

Materie

(ii) Maxwellgl. in Resonator



Maxwellgleichungen unter RB der Spiegel

$$\left(\Delta + k^2\right) w(\vec{r}) = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$$

$w(\vec{r})$: Modenfunktion

(1 Mode)

(iii) Kopplung d. ZNS und Resonator

gekoppelte $\underbrace{\text{Feld}}_{\text{klassisch}}$ - $\underbrace{\text{Materie}}_{\text{quantisiert}}$ gleichungen $\hat{=}$ halbklassisch

2.) Gleichung f. das $\vec{E}$ - Feld

$$\Box \vec{E} = \mu_0 \ddot{\vec{P}} + \mu_0 \dot{\vec{j}}$$

Zweiniveausystem

Verluste über ohmsche Gesetze

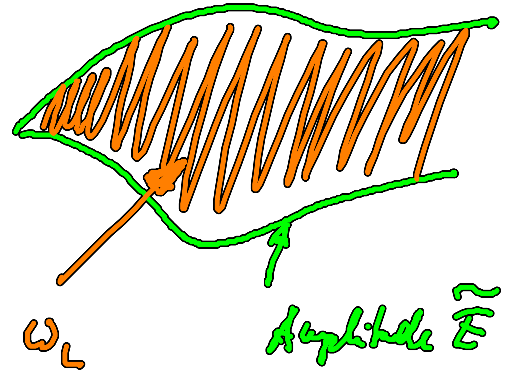
+ Randbedingungen

Ansatz: $\vec{E}(\vec{r},t) = W(\vec{r})\, e^{-i\omega_L t}\, \tilde{\vec{E}}(t)$

ein Mode (stehende Welle)

Frequenz d. Lichts

langsame Amplitude



Skalare Theorie

$$\partial_t E = \partial_t \left(\tilde{E} e^{-i\omega_L t}\right) = \partial_t \tilde{E}\, e^{-i\omega_L t} - i\omega_L e^{-i\omega_L t} \tilde{E}$$

$$\partial_t^2 E = \left(\cancel{\partial_t^2 \tilde{E}} - 2i\omega_L \partial_t \tilde{E} - \omega_L^2 \tilde{E}\right) e^{-i\omega_L t}$$

$$\partial_t^2 \tilde{E} \ll \omega_L \partial_t \tilde{E}$$

$$\Delta w(\vec{r}) = -k^2 w(\vec{r})$$

linke Seite Wellengleichung:

$$\Box E = \Big(\underbrace{-k^2 + \frac{\omega_L^2}{c^2}}_{=0 \text{ Dispersions-relation}} + \frac{2i\omega_L}{c^2}\partial_t\Big) \tilde{E}(t)\, e^{-i\omega_L t} w(\vec{r})$$

rechte Seite der Wellengleichung:

$$P = \tilde{P}(\vec{r},t)\, e^{-i\omega_L t}$$

$$\partial_t^2 P = \ldots -\omega_L^2 \tilde{P}(\vec r, t)\, e^{-i\omega_L t} \ldots$$

ist der dominante Term $\left(\partial_t^2 \tilde{P} \ll \omega_L^2 \tilde{P}\right)$

$$\partial_t j = -i\omega_L \tilde{j}\, e^{-i\omega_L t} = -i\omega_L\, \sigma\, \tilde{E}(t)\, w(\vec r)\, e^{-i\omega_L t}$$

σ ← ohmsche Verluste, $\sigma \hat{=}$ Leitfähigkeit

$$\mu_0 \ddot{P} + \mu_0 \dot{j} \longrightarrow -\mu_0 \omega_L^2 \tilde{P}(\vec r, t) - i\mu_0 \sigma \omega_L \tilde{E}(t)\, w(\vec r)\, e^{-i\omega_L t}$$

---

alle einsetzen:

$$\partial_t \tilde{E}(t) w(\vec r) = \frac{c^2 \mu_0}{2i\omega_L}\left(-\omega_L^2 \tilde{P}(\vec r, t) - i\omega_L \sigma \tilde{E}(t) w(\vec r)\right)$$

multipliziere $w^*(\vec r)$ und nutze: $\int d^3r\, w^*(\vec r)\, w(\vec r) = 1$

$c^2 = (\varepsilon_0 \mu_0)^{-1}$

$$\underbrace{\partial_t \tilde{E}(t)}_{\text{zeitliche Dynamik d. E-Felds im Resonator}} = i\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0} \underbrace{\int d^3r\, w^*(\vec r)\, \tilde{P}(\vec r, t)}_{\tilde{P}_w(t)\text{ Projektion d. Dipole auf Lasermode (treibt E-Feld)}} - \underbrace{\frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \tilde{E}(t)}_{\text{Verluste}}$$

$$\partial_t \tilde{E}(t) = i\frac{\omega_L}{2\varepsilon} \underbrace{\tilde{P}_w(t)} - \kappa \tilde{E}(t)$$

2.

3.) Quantenmechanik d. atomaren Dipols

$$\vec{P}(\vec{r},t) = \underbrace{d(t)}_{\langle q\vec{r}\rangle}\,\delta(\vec{r})$$

$\langle q\vec{r}\rangle$ Erwartungswert d. Dipols

$\vec{r}$: Ortsoperator

$$\Psi(\vec{r},t) = c_1(t)\,\varphi_1(\vec{r}) + c_2(t)\,\varphi_2(\vec{r})$$

Zwei-Niveau-System

$$P(t) = \langle \Psi(\vec{r},t)\,|\,q\vec{r}\,|\,\Psi(\vec{r},t)\rangle\,\delta(\vec{r})$$

$$= \sum_{m,m'} c_m^* c_{m'}\, d_{mm'}\,\delta(\vec{r})$$

über 1, 2

$$d_{mm'} = \int d^3r\, \varphi_m^*(\vec{r})\,\vec{r}\,\varphi_{m'}(\vec{r})$$

Dipolmoment

brauche $c_1(t)$, $c_2(t)$.

$$i\hbar\,\partial_t \Psi = \left(H_0 - q r E\right)\Psi$$

atomarer Hamiltonian — Dipol-WW

wird gewählt um c's zu bestimmen

Koeffizientengleichg. f. c_1, c_2 ableiten

1) $\Psi = c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2$ einsetzen

2) und φ_1^* bzw φ_2^* multiplizieren

3) $\int d^3r$ nehmen und $\int d^3r\,\varphi_i^*\varphi_j = \delta_{ij}$ nutzen

$H_0\varphi_{1/2} = \varepsilon_{1/2}\varphi_{1/2}$

$$\left.\begin{aligned} i\hbar\,\dot c_2(t) &= \varepsilon_2 c_2(t) - d_{21}E(t)\,c_1(t)\\ i\hbar\,\dot c_1^*(t) &= -\varepsilon_1 c_1^*(t) + d_{21}E(t)\,c_2^*(t)\end{aligned}\right\} d_{11}=d_{22}=0$$

dann kann $c_1^* c_2$ gebildet werden

(analog $c_2^* c_1$) um $\hat\rho(t)$ zu ermitteln

$$\rho_{12} = c_1^* c_2$$

$$i\hbar\,\dot\rho_{12} = i\omega_{12}\rho_{12} + i\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\frac{d_{21}E(t)}{\hbar}$$

mit $\rho_{11} = c_1^* \, c_1$

$\rho_{22} = c_2^* \, c_2$

Interpretation:

$|2\rangle$

ρ_{12} : beschreibt die Superposition „Übergangswahrscheinlichkeits-amplitude"

$|1\rangle$

Wahrscheinlichkeit Elektron in $|\varphi_1\rangle$ zu finden $\leftarrow \rho_{11}$

„Besetzungswahrscheinlichkeit", ρ_{22} analog

Kopplung v. $\rho_{12} \sim \rho_{11}, \rho_{22}$

$$\underbrace{\Delta(t) = \rho_{11}(t) - \rho_{22}(t)}_{\text{Unterschied zu klassischem Oszillator}} \quad \text{Inversion}$$

Gleichg. f. $\Delta(t)$ auch ableiten

1/ Ansatz f. Amplitude $\rho_{12} = \hat{\rho}_{12} \, e^{-i\omega_L t}$

2/ Feld ist mit Resonator in Resonanz

$$\boxed{\omega_L = \omega_{21}}$$

3) $$\frac{d_{21}}{\hbar}\tilde{E}(t)\, w(0) = \frac{d_{21}}{\hbar}\sqrt{\frac{\hbar\omega_L}{2\varepsilon_0}}\, w(0)\, b(t)$$

einführen $\tilde{E}(t) \to b(t)$

dimensionsloses Feld (klassisch)

4. Zusammenfassg. d. Lasergleichungen

$\partial_t \tilde{E}(t) \cdots \longrightarrow$

$$\partial_t b(t) = -\kappa\, b(t) + i g^* p(t)$$

Verluste

Antrieb E-Feld d. Dipol

$$\partial_t p(t) = i g\, \Delta(t)\, b(t) - \gamma\, p(t)$$

Antrieb Dipol d. Feld

Dämpfung d. Dipol (reingeschoben)

$$\partial_t \Delta(t) = 2 i g \left(p(t) b^*(t) - p^*(t) b(t)\right)$$

Antrieb Inversion d. Dipol und Feld

$$-\Gamma(\Delta(t) - \Delta_0)$$

Pumpe $\to \Delta_0$

mit $g^* = \sqrt{\frac{\omega_L}{2\varepsilon_0\hbar}}\cdot(-i)\, d_{12}\, w^*(0)$

$p = \rho_{12}$

Γ: Pumprate, g: Kopplungskonst. $\sim$ Dipolelement

$\longrightarrow$ gekoppeltes Syst. v. Gleichungen (3)

5. Lösung der Lasergleichungen

unter Approximation

a) schnelle Phasenrelaxation

$\dot{p} \ll \gamma p$ starke Dämpfung $\rightarrow \dot{p} = 0$

$$p(t) = \frac{ig\,\Delta(t)\; b(t)}{\gamma}$$

$$\rightsquigarrow \quad \dot{b} = -\kappa b - \frac{g^2 b}{\gamma} \Delta$$

$$\dot{b}^* = -\kappa b^* - \frac{g^2 b^*}{\gamma} \Delta$$

$n = b^* b$ interessiert, weil $\sim$ Intensität (Photonzahl)

$$\rightsquigarrow \quad \boxed{\dot{n}(t) = -2\kappa\, n(t) - w\, n(t)\, \Delta(t)}$$

$$w = \frac{2g^2}{\gamma}$$

Photonzahlgleichung

$$\boxed{\dot{\Delta}(t) = -2w\, n(t)\, \Delta(t) - \Gamma\,(\Delta(t) - \Delta_0)}$$

Inversionsgleichung.

2) Stationäre Lösung (Approx.)

$$\dot{n} = 0, \quad \dot{\Delta} = 0$$

$$0 = -2\kappa n - w n \Delta, \quad 0 = -2 w n \Delta - T(\Delta - \Delta_0)$$

$\Delta = \dots$ und einsetzen links

umstellen in 1. Gleichung f. n

$$\Delta = \frac{T \Delta_0}{(2wn + T)}$$

$$0 = n\left(-2\kappa - w \frac{T \Delta_0}{2wn + T}\right)$$

Gleichung für n, die Photonzahl

2 Lösungen:

(i) $n_1 = 0$ (links)

(ii) $-2\kappa(2wn + T) = w T \Delta_0$ (kümmere rechts)

$$n_2 = \frac{w \Delta_0 + 2\kappa}{-4\kappa w} \cdot T > 0$$

Forderung.

nur für $\Delta_0 < 0$

und $w|\Delta_0| > 2\kappa$

$\Delta_0 < 0$ heißt mehr El. oben als unten

$$\Delta_0 = \rho_{11}^0 - \rho_{22}^0 < 0$$

Die äußere Pumpe Δ_0 muss die Verluste (2κ) überwinden.