Zusatz II Quantisierung elektromagnetischer Feld:

Photonzahlzustände

1. Hamiltonian des elektromagnetischen Felds

klassische Feldenergie:

$$H = \int d^3r \left(\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\vec{r},t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(\vec{r},t) \right)$$

Modenentwicklung des Feldes:

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \sum_\lambda \left(\vec{u}_\lambda(\vec{r})\, E_\lambda^-(t) + \vec{u}_\lambda^*(\vec{r})\, E_\lambda^+(t) \right)$$

vollständiger Satz von Funktionen, aus Eigenwertproblem bestimmt

analog: $\psi = \sum_n c_n(t)\, \varphi_n(\vec{r})$

löst in $\Box\, \vec{E}(\vec{r},t) = 0$

quantisieren im freien Raum

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\partial_t^2$$

$$\Box \vec{E} = \sum_\lambda \left\{ \left[\Delta \vec{u}_\lambda(\vec{r})\right] E_\lambda^-(t) - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_\lambda^-(t)\right] \vec{u}_\lambda(\vec{r}) \right\} = 0$$

und lösen Eigenwertproblem $\quad \Delta \vec{u}_\lambda(\vec{r}) = \lambda_\kappa \vec{u}_\lambda(\vec{r})$

Eigenwerte λ_κ werden durch Randbedingungen und Lsg. der partiellen Dgl. bestimmt

nehmen wir als gelöst an.

$$0 = \sum_\lambda \underbrace{\left\{ \lambda_\kappa E_\lambda^-(t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} E_\lambda^-(t) \right\}}_{=0} \underbrace{\vec{u}_\lambda(\vec{r})}_{\text{linear unabhängig}}$$

$$\lambda_\kappa E_\lambda^-(t) - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 E_\lambda^-(t) = 0 \quad \text{mit } \lambda_\kappa \equiv -\frac{\omega_\lambda^2}{c^2}$$

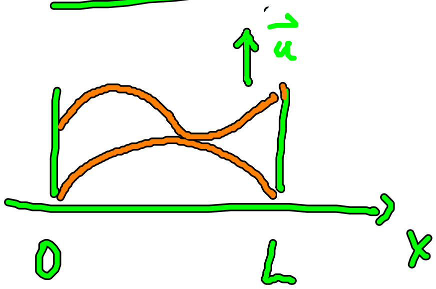
$$E_\lambda^-(t) = e^{-i\omega_\lambda t} E_\lambda^-(0)$$

$$E_\lambda^+(t) = e^{+i\omega_\lambda t} E_\lambda^+(0)$$

Bsp: (i) Vakuum $\quad \vec{u}_\lambda(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\, \vec{e}_{\lambda}(\vec{k})$

$$\omega_\lambda = ck = \omega$$

(ii) eindimensionaler Resonator



$\partial_x^2\, u_k(x) = \lambda_k\, u_k(x)$

analog QM: Kastenpotential

Randbedingungen, Feld $= 0$

$$u_\lambda = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \sin\left(\frac{\lambda\pi}{L}x\right) \qquad \lambda = 1, 2, 3, \dots$$

Normierung.

gebastelte Einheit, damit elektr. Feld entsteht und Ergebnis schön ist

$$\lambda = \frac{\omega_\lambda^2}{c^2} = \frac{\lambda^2\pi^2}{L^2}$$

dimensionslose Amplitude

$$E_\lambda^-(t) = -i\left(\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} b_\lambda(t) \quad ; \quad b_\lambda(t) = b_\lambda(0)\, e^{-i\omega_\lambda t}$$

$$E_\lambda^+(t) = i\left(\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} b_\lambda^*(t) \quad ; \quad b_\lambda^*(t) = \underbrace{b_\lambda^*(0)}_{SB}\, e^{+i\omega_\lambda t}$$

beschränken uns auf 1 Mode d. Felds $\underbrace{\qquad\qquad}_{HB}$

λ: weglassen

Schrödingerbild / Heisenbergbild

$\underbrace{\text{Schrödingerbild}}$	$\underbrace{\text{Heisenbergbild}}$
Operatoren sind zeitunabhg (implizit)	Operatoren tragen Zeitabhängigkeit (implizit)
SB	HB

heuristische Quantisierung:

$$\underset{\text{Zahl}}{b_\lambda, b_\lambda^*} \longrightarrow \underset{\text{Operatoren}}{b_\lambda, b_\lambda^+}$$

mit den Vertauschungsregeln $\underbrace{[b_\lambda, b_\lambda^+]}_{b_\lambda b_\lambda^+ - b_\lambda^+ b_\lambda} = 1$

$$[b_\lambda, b_{\lambda'}^+] = \delta_{\lambda\lambda'}$$

$$[b_\lambda^{(+)}, b_{\lambda'}^{(+)}] = 0$$

<u>eine Mode</u>

b, b^+ sind Leiteroperatoren d. harmon. Oszillators

$$H = \int dx \left(\frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2(x,t) + \frac{1}{2\mu_0} B^2(x,t) \right)$$

Mod.entwicklg. mit b, b^+ einsetzen

$$E_z = \sum_\lambda \cdots = -\left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} i \left(b - b^+\right) \sin\left(\frac{\omega}{c} x\right)$$

$\perp$ zu x

$$B_y = \left(\frac{2}{L}\right)^{1/2} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right)^{1/2} \left(b + b^+\right) \cos\left(\frac{\omega}{c} x\right) \frac{1}{c}$$

aus Maxwell $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{1}{c^2} \partial_t \vec{E}$

geometrie $\hat{=}$ $\partial_x B_y = \frac{1}{c^2} \partial_t E_z$

hilft bei B_y konstruieren

$$H = \frac{\varepsilon_0}{2} \underline{\int dx \left(\frac{2}{L}\right)} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right) \underline{\sin^2\left(\frac{\omega}{c} x\right)} \left(b - b^+\right)^2 (i)^2$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0 c^2} \underline{\int dx \left(\frac{2}{L}\right)} \left(\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0}\right) \underline{\cos^2\left(\frac{\omega}{c} x\right)} \left(b + b^+\right)^2$$

„ —— “ $\hat{=}$ 1

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left(-(b-b^+)^2 + (b+b^+)^2 \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left(-\underset{①}{(b-b^+)(b-b^+)} + \underset{②}{(b+b^+)(b+b^+)} \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\Big(-\cancel{bb} + bb^+ + b^+b - \cancel{b^+b^+} \rightarrow ①$$

$$\cancel{bb} + bb^+ + b^+b + \cancel{b^+b^+} \rightarrow ② \Big)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\left(2b^+b + 2\,\underbrace{bb^+}_{1+b^+b} \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{4}\,2\left(b^+b + 1 + b^+b \right)$$

$$= \frac{\hbar\omega}{2}\left(2b^+b + 1 \right) = \hbar\omega\left(b^+b + \frac{1}{2} \right)$$

Der Hamiltonian einer Lichtmode entspricht einem harmonischen Oszillator mit dem Erzeuger b^+ bzw. Vernichter b.

Sprechweise:

wir verstehen das Feld über Anregung v. Oszillatorquanten

(„Photon")

b^+ erzeugt Photon in Mode

b vernichtet Photon in Mode

$b^+ b$ ist der Anzahloperator d. Photonen

viele Moden: $$\boxed{H = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \left(b_\lambda^+ b_\lambda + \frac{1}{2}\right)}$$

2. Quantenzustände des Felds

2.1. Schrödingergleichung f. Photonen

$$\left(\hbar\omega\, b^+ b + \cancel{\frac{\hbar\omega}{2}}\right)\phi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\phi$$

↑ konstante Phase, ΔE

$$\phi(t) \hat{=} |\phi(t)\rangle$$

stationäre Schrödingergleichung:

$$\hbar\omega\left(b^+b+\frac{1}{2}\right)\phi_n = E_n\phi_n$$

a) Energie: $E_n = \hbar\omega\left(n+\frac{1}{2}\right)$

$$n = 0, 1, 2 \dots$$

n Anzahl der Photonen in Mode

b) Eigenfunktionen: $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n\phi_0$

ϕ_n: Zustand mit n Photonen

ϕ_0: Vakuumzustand

c) $b^+b \equiv \hat{n}$ Photonenzahloperator

d) allg. Lsg der zeitabhängigen Schrödingergleichung:

$$\phi(t) = \sum_n c_n \phi_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$|c_n|^2$ ist Wahrscheinlichkeit

bei Messg. n Photonen vorzufinden

2.2. Charakterisierung d. Zustände

$$E(x,t) = E_0(x)(b - b^+) = ?$$

$$b^+ b = ?$$

$$\langle \phi | E | \phi \rangle$$

Erwartungswert d. Felds $\quad \langle E \rangle = (\phi, E\phi)$

Schwankg. d. Felds $\quad \langle (\Delta E)^2 \rangle = (\phi, (\langle E^2 \rangle - \langle E \rangle^2)\phi)$

$$\langle n \rangle = (\phi, n\phi)$$

$$\langle (\Delta n)^2 \rangle = (\phi, (\langle n^2 \rangle - \langle n \rangle^2)\phi)$$

stark v. $\phi(t)$ abhängig!

2.3. Photonzahlzustand ϕ_n

ϕ_n sind Eigenzustände von H

$$\hbar\omega\hat{n} = H \quad \phi_n = \varepsilon_n \phi_n, \quad \phi_n(t) = e^{-i\frac{\varepsilon_n}{\hbar}t} \frac{(b^+)^n}{\sqrt{n!}} \phi_0 \qquad |0\rangle$$

(i) $\langle \hat{n} \rangle = \langle b^+ b \rangle =$

$$(\phi_n(t), \hat{n}\, \phi_n(t)) = (\phi_n, n\, \phi_n) = n$$

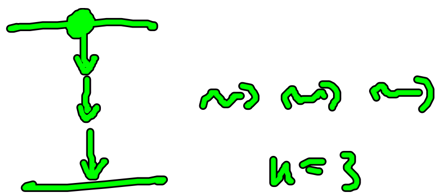
es sind n Photonen enthalten (im Mittel)

(ii) $\langle (\Delta n)^2 \rangle = (\phi_n, (\hat{n}^2 - \underbrace{\langle \hat{n} \rangle^2}_{n^2})\phi_n) = 0$

n^2

Es gibt immer 5 Photon

Die Photonzahl ist scharf messbar!



Entstehg. in spontaner Emission

(iii) $\langle \underline{E} \rangle = \left(\phi_n(t), E_0(x)(b^+ - b)\, \phi_n(t) \right)$

$$= E_0(x)\left\{ \left(\phi_n, b^+ \phi_n\right) - \left(\phi_n, b\, \phi_n\right) \right\}$$

$$= E_0(x)\left\{ \left(\phi_n, \sqrt{n+1}\, \phi_{n+1}\right) - \left(\phi_n, \sqrt{n}\, \phi_{n-1}\right) \right\}$$

$$\sim \underbrace{\left(\phi_n, \phi_{n+1}\right)}_{=0} \qquad \sim \underbrace{\left(\phi_n, \phi_{n-1}\right)}_{=0}$$

$\langle E \rangle = 0$ E-Feld verschwindet

(iv) Intensität $\langle E^2 \rangle =$

$$- E_0^2(x) \left(\phi_n, (b^+ - b)(b^+ - b)\, \phi_n\right)$$

$b^+ b^+,\ b b \to$ verschwindet

$$= - E_0^2(x) \left(\phi_n, \left(-\underbrace{b^+ b}_{\hat n} - \underbrace{b\, b^+}_{1-\hat n}\right) \phi_n\right)$$

$$= E_0^2(x)\,(2n+1)$$

$$\langle E^2 \rangle \neq 0 \quad \sim \quad E_0^2\,(2n+1)$$

$n = 0$

Interpretation:

- wenn n scharf ist, so ist Phase φ d. Felds beliebig unscharf

$$\Delta\varphi \cdot \Delta n \geq \text{Größe}$$

Unschärfe zw. Phase und Photonzahl

z.B. $E = \sum_n E_n\, e^{i\varphi_n}$, Phase gemittelt

$$\langle E \rangle = \sum_n E_n \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi_n\, e^{i\varphi_n}} = 0$$

$= 0$