English Summary:

<u>1.2 Operators in Hilbert space</u>

energy representation $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, $\sum_{n=0}^{\infty}|n\rangle\langle n| = 1$

spectral representation $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\text{projector}}$

self-adjoint (Hermitian) op.: $\hat{F} = \hat{F}^+$ (adjoint $\langle\psi|\hat{F}^+$)

<u>1.2 Eigenvalues and eigenstates of Hermitian operators</u>

- eigenvalues real
- eigenstates orthogonal $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ (discrete basis)

$\langle \underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ (continuous basis)

Unitary op. $U^+U = UU^+ = 1$ ($\Leftrightarrow U^+ = U^{-1}$, scalar product invariant)

basis transformation $|\psi\rangle = U^+|\psi'\rangle$

$\hat{F} = U^+\hat{F}U$ diagonalize

1.4 <u>Die Quantisierung</u>

Physikalische Observable $\longrightarrow$ hermite'sche Op. im Hilbertraum

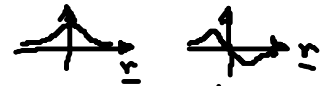
z.B. Ort $x \longrightarrow \hat{x}$

Geschwindigkeit $\dot{x} \longrightarrow \overset{\circ}{x} := \dfrac{\hat{p}_{kin}}{m} = \dfrac{\hat{p} - eA}{m}$

Parität $\hat{P}$ <u>Spiegelungsop.</u>

$\hat{P}|\underline{r}\rangle := |-\underline{r}\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$



symm. antisymm. Zustände

$\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1

Es gilt $\hat{P}^2 = 1$ Involution

$\hat{P}^{-1} = \hat{P} = \hat{P}^+$

„Ist das System im Zustand $|\psi\rangle$?" $\longrightarrow \hat{\mathcal{P}}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ <u>Proj.op.</u>

$$\left(\hat{\mathcal{P}}_\psi |\psi\rangle = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1} \quad \text{Eigenwert } 1 \right.$$

$$\left. \hat{\mathcal{P}}_\psi |\phi\rangle = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\phi\rangle}_{0 \text{ falls } \langle\psi| \perp \langle\phi|} \quad \text{Eigenwert } 0 \right)$$

Allg.: Durch $\hat{\mathcal{P}}_\psi \cdot \hat{\mathcal{P}}_\psi = \hat{\mathcal{P}}_\psi$ ist ein Projektor definiert

Vertauschungsrelationen

Op. kalkül ermöglicht Beschreibung mit nicht vertauschbaren Observablen:

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0 \iff$ $\hat{F}$ und $\hat{G}$ besitzen ein gemeinsames System von Eigenzuständen

$\iff$ Observable F und G zugleich scharf messbar

$[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0 \iff$ F und G nicht zugleich scharf messbar

$\iff$ Beschreibung der qm. Unschärfe

Quantisierung $\hat{=}$ Aufstellung von Vertauschungsrelationen

Kanon. Vertauschungsrelationen:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] &= \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \mathbb{1} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_k] &= [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \end{aligned}}$$

$i = 1, 2, 3$

kartes. Koord.

$$\left([\hat{p}_i, \hat{x}_k] \psi(r) = \frac{\hbar}{i} \partial_i (x_k \psi) - x_k \frac{\hbar}{i} (\partial_i \psi) = \frac{\hbar}{i} \delta_{ik} \psi \right)$$

$\Rightarrow$ alle weiteren Kommutatoren berechnen

Messprozess $\quad |\phi\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{1. Messung}} |\phi'\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{2. Messung}} |\phi''\rangle$

beliebig

Zustandsänderung durch WW mit Messapparat

Messwert $\qquad F' \qquad F''$

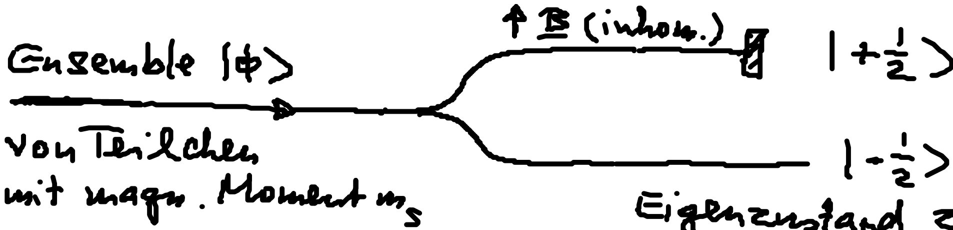
Forderung: $F' = F'' \quad \Rightarrow F' = F'' = F_n$ Eigenwert

$|\phi'\rangle = |\phi''\rangle = |n\rangle$ Eigenzustand von $\hat{F}$

Also $|\phi\rangle \rightarrow |n\rangle$

„Reduktion des Zustandsvektors durch Messung"

Beispiel : Stern-Gerlach-Apparat



Eigenzustand zu $m_s = -\frac{1}{2}$

Erwartungswert = Mittelwert über viele Messungen mit identisch präparierten Ausgangszustand $|\psi\rangle$

$$\langle \underset{\substack{\uparrow\\1}}{\psi} | \hat{F} | \underset{\substack{\uparrow\\1}}{\psi} \rangle = \sum_{n,n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{F}|n'\rangle}_{F_n \delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle = \sum_n F_n \, |\langle n|\psi\rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ (vor der Messung) den Messwert F_n zu messen $|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi|\underbrace{n\rangle\langle n}_{\hat{P}_n}|\psi\rangle = \langle\hat{P}_n\rangle$

Schreibweise mit Projektionsop.: $\boxed{|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\hat{P}_n\rangle}$

Maximalmessung

Es können i.a. nicht alle Obs. zugleich scharf gemessen werden.
gleichzeitige Messung eines vollständigen Satzes vertauschbarer Obs.: Maximalmessung
„vollständig": es ex. keine weiteren unabhängigen Obs., d.h. die gemeinsamen Eigenzustände sind nicht entartet.

Bei Entartung: weitere vertauschbare Op. hinzufügen, bis die gemeinsamen Eigenräume eindimensional sind

$\Rightarrow$ Zustand $|n, \alpha, \ldots\rangle$ ist durch Maximalmessung vollständig bestimmt

<u>Spezialfall</u>: Falls Energie-Eigenwerte nicht entartet sind (z.B. gebundene eindim. Zustände) ist der Ham.op. $\hat{H}$ eine vollständige Obs.

Bei Entartung: weitere, mit $\hat{H}$ vertauschbare Obs. hinzufügen (z.B. Drehimpuls, Spin)

<u>Hilbertraum $\mathcal{H}$</u> eines physik. Systems wird durch die gemeinsamen Eigenvektoren (Basis) eines vollständ. Satzes vertauschbarer Obs. aufgespannt.

<u>Nichtvertauschbarkeit u. Unschärfe</u>

Seien $\hat{F}$, $\hat{G}$ hermite'sche Op., $|\psi\rangle$ bel. Zustand

$$\left.\begin{aligned}\Delta\hat{F} &:= \hat{F} - \langle\hat{F}\rangle \\ \Delta\hat{G} &:= \hat{G} - \langle\hat{G}\rangle\end{aligned}\right\} \text{ ebenfalls hermite'sche Op.}$$

Bilde

$$f(\lambda) := \langle(\Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G})(\Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G})\rangle \qquad \lambda\in\mathbb{R}$$

$$= \langle(\Delta\hat{F})^2 - i\lambda[\Delta\hat{F},\Delta\hat{G}] + \lambda^2(\Delta\hat{G})^2\rangle$$

$$= \underbrace{\langle(\Delta F)^2\rangle}_{\alpha\geq 0} - i\lambda\underbrace{\langle[\Delta\hat{F},\Delta\hat{G}]\rangle}_{\beta} + \lambda^2\underbrace{\langle(\Delta\hat{G})^2\rangle}_{\gamma\geq 0}$$

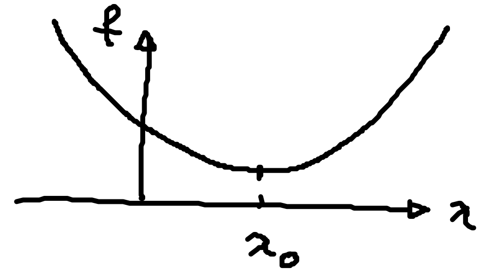
quadrat. Fkt. von λ mit $f(\lambda)\to\infty$ für $|\lambda|\to\infty$

(Lemma: für hermit. Op. $\langle\hat{A}\hat{A}\rangle\geq 0$, $(i\hat{A})^+ = -i\hat{A}$, $\langle\hat{A}\hat{B}\rangle^* = \langle\hat{B}\hat{A}\rangle$)

Mit $\hat{Q} := \Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}$

$\hat{Q}^+ = \Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G}$:

$$f(\lambda) = \underbrace{\langle\psi|\hat{Q}^+}_{\langle\phi|}\underbrace{Q|\psi\rangle}_{|\phi\rangle} = \langle\phi|\phi\rangle \geq 0 \qquad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



Min.: $f'(\lambda) = -i\beta + 2\lambda\gamma \overset{!}{=} 0$

$$\Longrightarrow \lambda_0 = \frac{i}{2}\frac{\beta}{\gamma}$$

$$f(\lambda_0) = \alpha + \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0 \qquad (*)$$

$$\beta^2 = \langle[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}]\rangle^2 = \langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle^2$$

$$= -\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle \underbrace{\langle[\hat{G},\hat{F}]\rangle}_{\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle^*} = -\underbrace{|\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle|^2}_{\geq 0} \Rightarrow \beta \text{ imaginär}$$

$$(*) \Rightarrow \langle(\Delta\hat{F})^2\rangle\langle(\Delta\hat{G})^2\rangle \geq \frac{1}{4}|\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle|^2$$

$$\boxed{\sqrt{\langle(\Delta\hat{F})^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta\hat{G})^2\rangle} \geq \frac{1}{2}|\langle[\hat{F},\hat{G}]\rangle|}$$

qm. Unschärfe

Speziell: $[\hat{p},\hat{x}] = \frac{\hbar}{i}\mathbb{1}$

$$\Longrightarrow \boxed{\sqrt{\langle(\Delta\hat{p})^2\rangle}\sqrt{\langle(\Delta\hat{x})^2\rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Impuls- Orts-
Unschärfe

Zus.fass.:

Axiome der QM

(1) Zustand des System $\longrightarrow |\psi\rangle$

(2) Obs. F $\longrightarrow$ herm. Op. $\hat{F}$

(3) Mittelwerte der Obs. $\longrightarrow \langle\psi|\hat{F}|\psi\rangle$

(4) Messung von F: Messwert $\longrightarrow$ Eigenwert F_n

$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle$ Reduktion des Zustandes

(5) Zeitentw. der Zustände : $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ Schrödinger-Gl.

QM ist keine Wellen- oder Teilchenmechanik,
sondern eine <u>Zustands</u>mechanik !

(Auflösung des Welle-Teilchen-Dualismus)