English Summary:

1.2 Operators in Hilbert space

energy representation $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle$, $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$, $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1$

spectral representation $\hat{H} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\text{projector}}$

self-adjoint (Hermitian) op.: $\hat{F} = \hat{F}^\dagger$ (adjoint $\langle\psi|\hat{F}^\dagger$)

1.2 Eigenvalues and eigenstates of Hermitian operators

- eigenvalues real
- eigenstates orthogonal $\langle m|n\rangle = \delta_{mn}$ (discrete basis)

$\langle \underline{r}|\underline{r}'\rangle = \delta(\underline{r}-\underline{r}')$ (continuous basis)

Unitary op. $U^\dagger U = UU^\dagger = 1$ ($\Leftrightarrow U^\dagger = U^{-1}$, scalar product invariant)

basis transformation $|\psi\rangle = U^\dagger|\psi'\rangle$

$\hat{F} = U^\dagger \hat{F} U$ diagonalize

1.4 Die Quantisierung

Physikalische Observable $\longrightarrow$ hermite'sche Op. im Hilbertraum

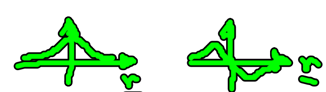
z.B. Ort $x \longrightarrow \hat{x}$

Geschwindigkeit $\dot{x} \longrightarrow \hat{\dot{x}} := \frac{\hat{p}_{kin}}{m} = \frac{\hat{p} - eA}{m}$

Parität $\hat{P}$ Spiegelungsop.

$\hat{P}|\underline{r}\rangle := |-\underline{r}\rangle$

$\hat{P}|\psi\rangle = \pm|\psi\rangle$



symm. antisymm.
Zustände

$\Rightarrow$ Eigenwerte ± 1

$\Leftarrow$ gilt $\hat{P}^2 = 1$ Involution

$\hat{P}^{-1} = \hat{P} = \hat{P}^\dagger$

„Ist das System im Zustand $|\psi\rangle$?" $\longrightarrow$ $\hat{P}_\psi := |\psi\rangle\langle\psi|$ Proj.op.

($\hat{P}_\psi |\psi\rangle = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\psi\rangle}_{1}$ Eigenwert 1

$\hat{P}_\psi |\phi\rangle = |\psi\rangle \underbrace{\langle\psi|\phi\rangle}_{0}$ Eigenwert 0 falls $\langle\psi| \perp \langle\phi|$)

Allg.: Durch $\hat{P}_\psi \cdot \hat{P}_\psi = \hat{P}_\psi$ ist ein Projektor definiert

Vertauschungsrelationen

Op.kalkül ermöglicht Beschreibung mit nicht vertauschbaren Observablen:

$[\hat{F}, \hat{G}] = 0 \iff \hat{F}$ und $\hat{G}$ besitzen ein gemeinsames System von Eigenzuständen

$\iff$ Observable F und G zugleich scharf messbar

$[\hat{F}, \hat{G}] \neq 0 \iff$ F und G nicht zugleich scharf messbar

$\iff$ Beschreibung der qm. Unschärfe

Quantisierung $\hat{=}$ Aufstellung von Vertauschungsrelationen

Kanon. Vertauschungsrelationen:

$$\boxed{\begin{aligned} [\hat{p}_i, \hat{x}_k] &= \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\mathbb{1} \\ [\hat{p}_i, \hat{p}_k] &= [\hat{x}_i, \hat{x}_k] = 0 \end{aligned}}$$

$i = 1, 2, 3$ kartes. Koord.

($[\hat{p}_i, \hat{x}_k]\psi(r) = \frac{\hbar}{i}\partial_i(x_k\psi) - x_k\frac{\hbar}{i}(\partial_i\psi) = \frac{\hbar}{i}\delta_{ik}\psi$)

$\Rightarrow$ alle weiteren Kommutatoren berechnen

Messprozess $\underset{\text{beliebig}}{|\phi\rangle} \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{1. Messung}} |\phi'\rangle \xrightarrow[\text{von } \hat{F}]{\text{2. Messung}} |\phi''\rangle$

Zustandsänderung durch WW mit Messapparat

Messwert F' F''

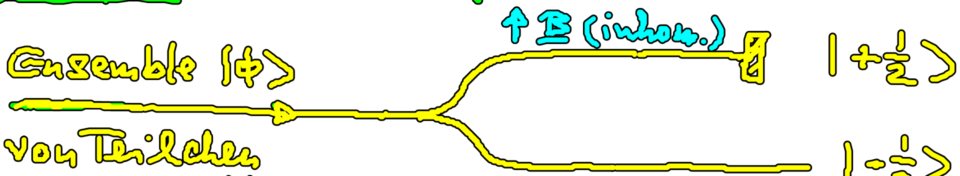
Forderung: $F' = F''$ $\Rightarrow F' = F'' = F_n$ Eigenwert

$|\phi'\rangle = |\phi''\rangle = |n\rangle$ Eigenzustand von $\hat{F}$

Also $|\phi\rangle \rightarrow |n\rangle$

„Reduktion des Zustandsvektors durch Messung"

Beispiel: Stern-Gerlach-Apparat



Erwartungswert = Mittelwert über viele Messungen mit identisch präparierten Ausgangszustand $|\psi\rangle$

$$\langle\psi\underset{\overset{\uparrow}{1}}{|}\hat{F}\underset{\overset{\uparrow}{1}}{|}\psi\rangle = \sum_{n,n'} \langle\psi|n\rangle \underbrace{\langle n|\hat{F}|n'\rangle}_{F_n \delta_{nn'}} \langle n'|\psi\rangle = \sum_n F_n \, |\langle n|\psi\rangle|^2$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ (vor der Messung) den Messwert F_n zu messen $|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\psi\underbrace{|n\rangle\langle n|}_{\hat{P}_n}\psi\rangle = \langle\hat{P}_n\rangle$

Schreibweise mit Projektionsop.: $\boxed{|\langle n|\psi\rangle|^2 = \langle\hat{P}_n\rangle}$

Maximalmessung

Es können i.a. nicht alle Obs. zugleich scharf gemessen werden.

Gleichzeitige Messung eines vollständigen Satzes vertauschbarer Obs.: Maximalmessung

„vollständig": es ex. keine weiteren unabhängigen Obs., d.h. die gemeinsamen Eigenzustände sind nicht entartet.

Bei Entartung: weitere vertauschbare Op. hinzufügen, bis die gemeinsamen Eigenräume eindimensional sind

$\Rightarrow$ Zustand $|n, \alpha, \ldots\rangle$ ist durch Maximalmessung vollständig bestimmt

<u>Spezialfall</u>: Falls Energie-Eigenwerte nicht entartet sind (z.B. gebundene eindim. Zustände) ist der Ham.op. $\hat{H}$ eine vollständige Obs.

Bei Entartung: weitere, mit $\hat{H}$ vertauschbare Obs. hinzufügen (z.B. Drehimpuls, Spin)

<u>Hilbertraum $\mathcal{H}$</u> eines physik. Systems wird durch die gemeinsamen Eigenvektoren (Basis) eines vollständ. Satzes vertauschbarer Obs. aufgespannt.

<u>Nichtvertauschbarkeit u. Unschärfe</u>

Seien $\hat{F}$, $\hat{G}$ hermite'sche Op., $|\psi\rangle$ bel. Zustand

$$\left.\begin{aligned} \Delta\hat{F} &:= \hat{F} - \langle \hat{F} \rangle \\ \Delta\hat{G} &:= \hat{G} - \langle \hat{G} \rangle \end{aligned}\right\} \text{ebenfalls hermite'sche Op.}$$

Bilde

$$f(\lambda) := \langle (\Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G})(\Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}) \rangle \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$

$$= \langle (\Delta\hat{F})^2 - i\lambda[\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] + \lambda^2(\Delta\hat{G})^2 \rangle$$

$$= \underbrace{\langle (\Delta F)^2 \rangle}_{\alpha \geq 0} - i\lambda \underbrace{\langle [\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] \rangle}_{\beta} + \lambda^2 \underbrace{\langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle}_{\gamma \geq 0}$$

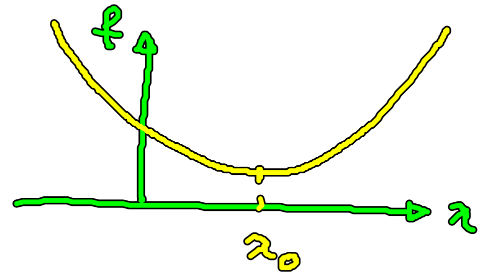
quadrat. Fkt. von λ mit $f(\lambda) \to \infty$ für $|\lambda| \to \infty$

(Lemma: für hermit. Op. $\langle \hat{A}\hat{A} \rangle \geq 0$, $(i\hat{A})^+ = -i\hat{A}$, $\langle \hat{A}\hat{B} \rangle^* = \langle \hat{B}\hat{A} \rangle$)

Mit $\hat{Q} := \Delta\hat{F} - i\lambda\Delta\hat{G}$

$\hat{Q}^+ = \Delta\hat{F} + i\lambda\Delta\hat{G}$:

$$f(\lambda) = \langle \underbrace{\psi | \hat{Q}^{+}}_{\langle \phi |} \underbrace{\hat{Q} | \psi}_{| \phi \rangle} \rangle = \langle \phi | \phi \rangle \geq 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$



$$\text{Min.}: \; f'(\lambda) = -i\beta + 2\lambda\gamma \overset{!}{=} 0$$

$$\Longrightarrow \lambda_0 = \frac{i}{2}\frac{\beta}{\gamma}$$

$$f(\lambda_0) = \alpha + \frac{\beta^2}{2\gamma} - \frac{\beta^2}{4\gamma} = \alpha + \frac{\beta^2}{4\gamma} \geq 0 \quad (*)$$

$$\beta^2 = \langle [\Delta\hat{F}, \Delta\hat{G}] \rangle^2 = \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^2$$

$$= - \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle \underbrace{\langle [\hat{G}, \hat{F}] \rangle}_{\langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle^*} = - \underbrace{| \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle |^2}_{\geq 0} \quad \Rightarrow \beta \text{ imaginär}$$

$$(*) \Longrightarrow \langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle \langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle \geq \frac{1}{4} | \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle |^2$$

$$\boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{F})^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta\hat{G})^2 \rangle} \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{F}, \hat{G}] \rangle |}$$

qm. Unschärfe

Speziell: $[\hat{p}, \hat{x}] = \frac{\hbar}{i} \mathbb{1}$

$$\rightarrow \boxed{\sqrt{\langle (\Delta\hat{p})^2 \rangle} \sqrt{\langle (\Delta\hat{x})^2 \rangle} \geq \frac{\hbar}{2}}$$

Impuls- Orts-

Unschärfe

Zus.fass.:

Axiome der QM

(1) Zustand des System $\longrightarrow$ $|\psi\rangle$

(2) Obs. F $\longrightarrow$ herm. Op. $\hat{F}$

(3) Mittelwerte der Obs. $\longrightarrow$ $\langle \psi | \hat{F} | \psi \rangle$

(4) Messung von F: Messwert $\longrightarrow$ Eigenwert F_n

$|\psi\rangle \longrightarrow |n\rangle$ Reduktion des Zustandes

(5) Zeitentw. der Zustände: $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle = \hat{H} |\psi\rangle$ Schrödinger-Gl.

QM ist keine Wellen- oder Teilchenmechanik, sondern eine Zustandsmechanik !

(Auflösung des Welle-Teilchen-Dualismus)