English Summary:

1.5 Dynamics

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t = \hat H|\psi\rangle_t \quad\Rightarrow\quad |\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H t}|\psi\rangle_0 = U(t,0)|\psi\rangle_0$$

$$\langle \mathring{F}\rangle := \frac{d}{dt}\langle \hat F\rangle \quad\Rightarrow\quad \boxed{\mathring{F} = \frac{i}{\hbar}[\hat H,\hat F] + \frac{\partial \hat F}{\partial t}}$$

Ehrenfest's Theorem: $\frac{d}{dt}\langle \hat{\underline{r}}\rangle = \frac{1}{m}\langle \hat{\underline{p}}\rangle$

$\frac{d}{dt}\langle \hat{\underline{p}}\rangle = -\langle \underline{\nabla} V(\hat{\underline{r}})\rangle$

	Operator	eigenvectors $\|n\rangle$	state vectors $\|\psi\rangle$
Schrödinger picture	$\hat F_S(\hat{\underline{r}},\hat{\underline{p}})$ time-indep.	time-indep.	$\|\psi\rangle_t$ time-dep. $\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\|\psi\rangle_t = \hat H\|\psi\rangle_t}$
Heisenberg picture $\hat F_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat H t}\hat F_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H t}$	$\hat F_H(t)$ time-dep. $\boxed{\frac{d\hat F_H}{dt} = \frac{i}{\hbar}[\hat H,\hat F_H]}$ $\mathring{F} = \frac{d}{dt}\hat F_H$	time-dep.	$\|\psi\rangle_H = \|\psi\rangle_0$ time-indep.
Interaction picture (Dirac) $\hat H = \hat H^0 + \hat H^1$, $\hat F_W(t) = e^{\frac{i}{\hbar}\hat H^0 t}\hat F_S e^{-\frac{i}{\hbar}\hat H^0 t}$	$\hat F_W$ time-dep. through $\hat H^0$		$\|\psi\rangle_W$ time-dep. through $\hat H^1$; $i\hbar\frac{d}{dt}\|\psi\rangle_W = \hat H^1_W\|\psi\rangle_W$

1.6 Der harmon. Oszillator u. Leiteroperatoren

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstell. im Hilbertraum:
1-dim. harmon. Osz. (Notation im Folg.: $x, p, \dots$ statt $\hat x, \hat p, \dots$)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2}x^2}$$ Hamiltonop.

$$[p,x] = \frac{\hbar}{i}$$ Vertauschungs-Rel.

Def. eines Operators („Leiterop.")

$$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$ nicht hermite'sch!

$$b^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}\,p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\,x$$

$$\Rightarrow b b^+ = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{[p,x] = \frac{\hbar}{i}} = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b^+ b = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{\hbar/i} = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \quad (2)$$

(1) − (2)

$$\Longrightarrow [b, b^+] = 1$$

$$\stackrel{(2)}{\Longrightarrow} \boxed{H = \hbar\omega \left(b^+ b + \frac{1}{2} \right)}$$

Weitere Vertauschungsrel.:

$$\left.\begin{aligned} (b b^+) b &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} H b + \frac{1}{2} b \\ = b (b^+ b) &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} b H - \frac{1}{2} b \end{aligned}\right\} \quad [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega b$$

adjungiert: $(bH)^+ - (Hb)^+ = -[b^+, H] = \hbar\omega b^+$

$$[b, (b^+)^n] = n (b^+)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^+} (b^+)^n$$

Beweis durch vollst. Induktion

$n = 1$: $[b, b^+] = 1$ ✓

Sei für $n \geq 1$ Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} [b, (b^+)^{n+1}] &= b (b^+)^{n+1} - (b^+)^{n+1} b \\ &= \underbrace{b (b^+)^n b^+ - (b^+)^n b b^+}_{} + \underbrace{(b^+)^n b b^+ - (b^+)^n b^+ b}_{} \\ &= \underbrace{[b, (b^+)^n]}_{n (b^+)^{n-1}} b^+ + (b^+)^n \underbrace{[b, b^+]}_{1} \end{aligned}$$

$$= (n+1)(b^+)^n \qquad \square$$

adjungiert: $[b^+, b^n] = -n b^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$

Für bel., in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f:

$$\boxed{\begin{aligned} [b, f(b^+)] &= \frac{\partial}{\partial b^+} f(b^+) \\ [b^+, f(b)] &= -\frac{\partial}{\partial b} f(b) \end{aligned}}$$

Eigenwerte von H

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit Eigenwert E

$|E\rangle \neq \theta$

$H|E\rangle = E|E\rangle$

$$\Rightarrow \hbar\omega \underbrace{\langle E| b^+ b|E\rangle}_{\langle\psi|\psi\rangle \geq 0} = \langle E|(H - \frac{\hbar\omega}{2})|E\rangle = E - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}}$ Energiespektrum nach unten beschränkt

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \iff b|E\rangle = \theta$$

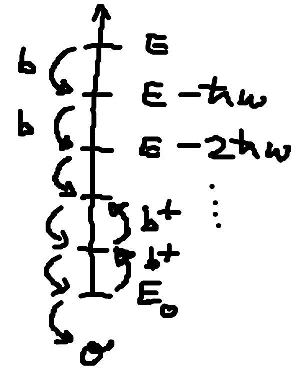
<u>Beh.</u>: $b|E\rangle$ ist Eigenzustand zu H mit $E - \hbar\omega$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \implies H b|E\rangle = (E - \hbar\omega) b|E\rangle$$

Beweis:

$$Hb|E\rangle = (bH - \underbrace{[b, H]}_{\hbar\omega b})|E\rangle = b(H - \hbar\omega)|E\rangle = b(E - \hbar\omega)|E\rangle$$
$$= (E - \hbar\omega) b|E\rangle$$

□



Durch Wiederholung könnte man Eigenzustände $|E\rangle \neq \theta$ mit bel. tiefer Energie erzeugen, wenn nicht $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ gelten müsste.

Daher ex. $m \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^m |E\rangle = \theta \quad , \text{ aber } b^{m-1}|E\rangle \neq \theta$$

Def. <u>Grundzustand</u> $|0\rangle := b^{m-1}|E\rangle$

nicht Null-ket θ
sondern Quantenzahl $n=0$

$$H|0\rangle = \hbar\omega\,(b^+b + \tfrac{1}{2})|0\rangle = \tfrac{1}{2}\hbar\omega|0\rangle$$

$$b|0\rangle = b^m|E\rangle = \theta$$

Also $\boxed{E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}}$ $\boxed{b|0\rangle = \theta}$

Weiter:

$$H b^+|0\rangle = (\underbrace{b^+H + \hbar\omega b^+}_{[b^+,H] = -\hbar\omega b^+})|0\rangle = b^+\underbrace{(H+\hbar\omega)|0\rangle}_{\frac{\hbar\omega}{2}+\hbar\omega}$$

d.h. $b^+|0\rangle$ ist Eigenzust. zum Eigenwert $\frac{3}{2}\hbar\omega$

Vollständige Induktion: Sei $H(b^+)^n|0\rangle = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})(b^+)^n|0\rangle$

Dann $H(b^+)^{n+1}|0\rangle \overset{!}{=} \hbar\omega(n+1+\frac{1}{2})(b^+)^{n+1}|0\rangle$ zeigen

□

<u>Normierung</u> der Eigenzustände $(b^+)^n|0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$

n-ter angeregte Zustand:

$$|n\rangle = \alpha_n (b^+)^n|0\rangle \quad \text{mit Normierungsfaktor } \alpha_n$$

$$1 \overset{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0|b^n (b^+)^n|0\rangle$$

$$\langle 0|b^n(b^+)^n|0\rangle = \langle 0|b^{n-1}\Big((b^+)^n b + \underbrace{[b,(b^+)^n]}_{n(b^+)^{n-1}}\Big)|0\rangle$$

$$= \langle 0|b^{n-1}(b^+)^n \underbrace{b|0\rangle}_{0} + n\langle 0|b^{n-1}(b^+)^{n-1}|0\rangle$$

$$\overset{n\text{-mal}}{=} \dots$$

$$= n(n-1)\dots\cdot 2\cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_{1} = n!$$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor):

$$\boxed{|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^n|0\rangle}$$ normierte Eigenzustände

zu den Energieeigenwerten $\boxed{E_n = \hbar\omega(n+\tfrac{1}{2})}$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

<u>Quanten-Sprechweise</u>:

$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega$ „<u>Schwingungsquantum</u>"

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (<u>Phononen</u>) der Frequenz ω

b Vernichtungsop.
b^+ Erzeugungsop. } für Schwingungsquanten

$$b|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} b(b^+)^n|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}\{(b^+)^n b + [b,(b^+)^n]\}|0\rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n!}} \underbrace{n(b^+)^{n-1}|0\rangle}_{\sqrt{(n-1)!}\,|n-1\rangle} = \frac{n}{\sqrt{n}}|n-1\rangle = \sqrt{n}\,|n-1\rangle$$

$$b^+|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(b^+)^{n+1}|0\rangle = \sqrt{n+1}\,|n+1\rangle$$

$N := b^+ b$ „Teilchenzahl" op. der Schwingungsquanten

$$N|n\rangle = \underbrace{b^+\underbrace{b|n\rangle}_{\sqrt{n}\,|n-1\rangle}}_{} = n|n\rangle$$

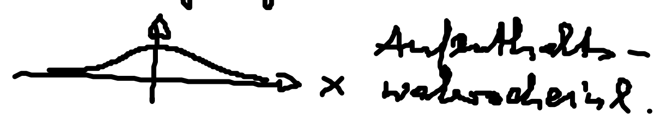
$\sqrt{n}\sqrt{n}\,|n\rangle$

in Übereinstimmung mit

$$H|n\rangle = \hbar\omega\left(N+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle = \hbar\omega\left(n+\tfrac{1}{2}\right)|n\rangle$$

Unterschiede zur klass. Schwingung:

- diskrete Energien $E_n = \hbar\omega(n+\frac{1}{2})$
- Nullpunktsenergie $E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega$
- Unschärfe-Bez. x und p nicht zugleich scharf
  $$\Delta x\,\Delta p = \hbar\left(n+\tfrac{1}{2}\right)$$
- Energie scharf $\Rightarrow$ Schwingungs-Phase unbestimmt



- Phase scharf (kohärenter Zustand)
  $\Rightarrow$ kein Energieeigenzustand
  (nicht stationär, schwing. Gauß-Wellenpaket)
  Überlagerung vieler Energie
  „Glauberzustände")
- Aufenthaltswahrsch. $\neq 0$ im klass. verbotenen Bereich (Tunneleffekt)
- große Energie (n groß) $\rightarrow$ klass. Korrespondenzprinzip

$$E \gg \hbar\omega = 25\ \text{meV}$$
$$\hat{=}\ 10^{-27}\ \text{kWh}$$