

English Summary:

1.5 Dynamics

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi\rangle_t = \hat{H} |\psi\rangle_t \Rightarrow |\psi\rangle_t = e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} |\psi\rangle_0 = U(t,0) |\psi\rangle_0$$

$$\langle \hat{F} \rangle := \frac{d}{dt} \langle \hat{F} \rangle \Rightarrow \boxed{\dot{\hat{F}} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}] + \frac{\partial \hat{F}}{\partial t}}$$

Ehrenfest's Theorem: $\frac{d}{dt} \langle \hat{x} \rangle = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle$
 $\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = - \langle \nabla V(\hat{x}) \rangle$

	Operator	eigenstates $ n\rangle$	state vectors $ \psi\rangle$
<u>Schrödinger picture</u>	$\hat{F}_S(\hat{x}, \hat{p})$ time-indep.	time-indep.	$ \psi\rangle_t$ time-dep. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi\rangle_t = \hat{H} \psi\rangle_t$
<u>Heisenberg picture</u> $\hat{F}_H(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H} t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H} t}$	$\hat{F}_H(t)$ time-dep. $\frac{d\hat{F}_H}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{F}_H]$ $\hat{F} = \frac{d}{dt} \hat{F}_H$	time-dep.	$ \psi\rangle_H = \psi\rangle_0$ time-indep.
<u>Interaction picture</u> (Dirac) $\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^I$ $\hat{F}_I(t) = e^{\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t} \hat{F}_S e^{-\frac{i}{\hbar} \hat{H}^0 t}$	\hat{F}_I time-dep. through \hat{H}^0		$ \psi\rangle_I$ time-dep. through \hat{H}^I $i\hbar \frac{d}{dt} \psi\rangle_I = \hat{H}^I \psi\rangle_I$

1.6 Der harmon. Oszillator u. Leiteroperatoren

Anwendungsbeispiel der abstrakten Darstell. im Hilbertraum:
 1-dim. harmon. Osz. (Notation in Folg.: x, p, \dots statt \hat{x}, \hat{p}, \dots)

$$\boxed{H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} x^2}$$

Hamiltonop.

$$[p, x] = \frac{\hbar}{i}$$

Vertauschungs-Rel.

Def. eines Operators („Leiterop.“)

$$b := \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p - i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x \quad \text{nicht hermitisch!}$$

$$b^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}} p + i\sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}} x$$

$$\Rightarrow b b^\dagger = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 + \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{[p,x] = \frac{\hbar}{i}} = \frac{1}{\hbar\omega} H + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$b^\dagger b = \frac{1}{2m\hbar\omega} p^2 + \frac{m\omega}{2\hbar} x^2 - \frac{i}{2\hbar} \underbrace{(px - xp)}_{\hbar/i} = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{1}{2} \quad (2)$$

(1) - (2)

$$\Rightarrow [b, b^\dagger] = 1$$

$$(2) \Rightarrow \boxed{H = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right)}$$

Weitere Vertauschungsrel.:

$$\left. \begin{aligned} (b b^\dagger) b &\stackrel{(1)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} H b + \frac{1}{2} b \\ b (b^\dagger b) &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\hbar\omega} b H - \frac{1}{2} b \end{aligned} \right\} [b, H] = bH - Hb = \hbar\omega b$$

$$\text{adjungiert: } (bH)^\dagger - (Hb)^\dagger = -[b^\dagger, H] = \hbar\omega b^\dagger$$

$$[b, (b^\dagger)^n] = n(b^\dagger)^{n-1} = \frac{\partial}{\partial b^\dagger} (b^\dagger)^n$$

Beweis durch vollst. Induktion

$$n=1: [b, b^\dagger] = 1 \quad \checkmark$$

Sei für $n \geq 1$ Behaupt. bewiesen. Dann ist

$$\begin{aligned} [b, (b^\dagger)^{n+1}] &= b \underbrace{(b^\dagger)^{n+1}}_{\dots} - \underbrace{(b^\dagger)^{n+1}}_{\dots} b \\ &= b \underbrace{(b^\dagger)^n b^\dagger}_{\dots} - \underbrace{(b^\dagger)^n b b^\dagger}_{\dots} + \underbrace{(b^\dagger)^n b b^\dagger}_{\dots} - \underbrace{(b^\dagger)^n b^\dagger b}_{\dots} \\ &= \underbrace{[b, (b^\dagger)^n] b^\dagger}_{n(b^\dagger)^{n-1}} + \underbrace{(b^\dagger)^n [b, b^\dagger]}_1 \end{aligned}$$

$$= (n+1)(b^\dagger)^n$$

□

adjungiert: $[b^\dagger, b^n] = -nb^{n-1} = -\frac{\partial}{\partial b} b^n$

Für Def., in Potenzreihe entwickelbare Fkt. f:

$$[b, f(b^\dagger)] = \frac{\partial}{\partial b^\dagger} f(b^\dagger)$$

$$[b^\dagger, f(b)] = -\frac{\partial}{\partial b} f(b)$$

Eigenwerte von H

Sei $|E\rangle$ ein normierter Eigenzustand von H mit Eigenwert E

$$|E\rangle \neq 0$$

$$H|E\rangle = E|E\rangle$$

$$\rightarrow \hbar\omega \underbrace{\langle E|b^\dagger b|E\rangle}_{\langle n|n\rangle \geq 0} = \langle E|(H - \frac{\hbar\omega}{2})|E\rangle = E - \frac{\hbar\omega}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{E \geq \frac{\hbar\omega}{2}} \quad \text{Energiespektrum nach unten beschränkt}$$

$$E = \frac{\hbar\omega}{2} \iff b|E\rangle = 0$$

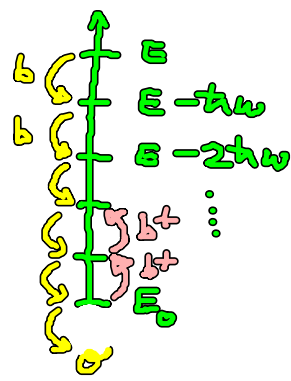
Beh.: $b|E\rangle$ ist Eigenzustand von H mit $E - \hbar\omega$

$$H|E\rangle = E|E\rangle \implies H b|E\rangle = (E - \hbar\omega) b|E\rangle$$

Beweis:

$$H b|E\rangle = (bH - \underbrace{[b, H]}_{\hbar\omega b})|E\rangle = b(H - \hbar\omega)|E\rangle = b(E - \hbar\omega)|E\rangle = (E - \hbar\omega) b|E\rangle$$

Durch Wiederholung könnte man
Eigenzustände $|E\rangle \neq \emptyset$ mit bel.
tiefer Energie erzeugen, wenn
nicht $E \geq \frac{\hbar\omega}{2}$ gelten müsste.



Daher ex. $n \in \mathbb{N}$, so dass

$$b^n |E\rangle = \emptyset, \text{ aber } b^{n-1} |E\rangle \neq \emptyset$$

Def. Grundzustand $|0\rangle := b^{n-1} |E\rangle$

↑
nicht Null-kt \emptyset
sondern Quantenzahl $n=0$

$$H|0\rangle = \hbar\omega \left(b^\dagger b + \frac{1}{2} \right) |0\rangle = \frac{1}{2} \hbar\omega |0\rangle$$

↖
 $b|0\rangle = b^n |E\rangle = \emptyset$

Also $E_0 = \frac{\hbar\omega}{2}$ $b|0\rangle = \emptyset$

Weiter:

$$H b^\dagger |0\rangle = \underbrace{(b^\dagger H + \hbar\omega b^\dagger)}_{[b^\dagger, H] = -\hbar\omega b^\dagger} |0\rangle = b^\dagger \underbrace{(H + \hbar\omega)}_{\frac{\hbar\omega}{2} + \hbar\omega} |0\rangle$$

d.h. $b^\dagger |0\rangle$ ist Eigenzust. zum Eigenwert $\frac{3}{2} \hbar\omega$

Vollständige Induktion: Sei $H(b^\dagger)^n |0\rangle = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})(b^\dagger)^n |0\rangle$

$$\text{Dann } H(b^\dagger)^{n+1} |0\rangle \stackrel{!}{=} \hbar\omega(n+1 + \frac{1}{2})(b^\dagger)^{n+1} |0\rangle$$

zeigen □

Normierung der Eigenzustände $(b^\dagger)^n |0\rangle$:

Der Grundzustand sei normiert: $\langle 0|0\rangle = 1$

n -ter angeregter Zustand:

$$|n\rangle = \alpha_n (b^\dagger)^n |0\rangle \text{ mit Normierungsfaktor } \alpha_n$$

$$1 \stackrel{!}{=} \langle n|n\rangle = |\alpha_n|^2 \langle 0|b^n (b^\dagger)^n |0\rangle$$

$$\begin{aligned}
\langle 0|b^n(b^\dagger)^n|0\rangle &= \langle 0|b^{n-1} \underbrace{\left((b^\dagger)^n b + [b, (b^\dagger)^n] \right)}_{n(b^\dagger)^{n-1}}|0\rangle \\
&= \langle 0|b^{n-1} \underbrace{(b^\dagger)^n b|0\rangle}_0 + n \langle 0|b^{n-1} (b^\dagger)^{n-1}|0\rangle \\
&= \dots \\
&= n(n-1) \dots \cdot 2 \cdot 1 \underbrace{\langle 0|0\rangle}_1 = n!
\end{aligned}$$

also (bis auf willkürlichen Phasenfaktor):

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^n |0\rangle \quad \text{normierte Eigenzustände}$$

zu den Energie Eigenwerten

$$E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$H|n\rangle = E_n|n\rangle$$

Quanten - Sprechweise :

$$E_{n+1} - E_n = \hbar\omega \quad \text{„Schwingungsquantum“}$$

$|n\rangle$ Zustand mit n Schwingungsquanten (Phononen)
der Frequenz ω

b Vernichtungsop. } für Schwingungsquanten
 b^\dagger Erzeugungsop. }

$$\begin{aligned}
b|n\rangle &= \frac{1}{\sqrt{n!}} b (b^\dagger)^n |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} \{ (b^\dagger)^n b + [b, (b^\dagger)^n] \} |0\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{n!}} \underbrace{n (b^\dagger)^{n-1} |0\rangle}_{\sqrt{(n-1)!} |n-1\rangle} = \frac{n}{\sqrt{n}} |n-1\rangle = \sqrt{n} |n-1\rangle
\end{aligned}$$

$$b^\dagger |n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (b^\dagger)^{n+1} |0\rangle = \sqrt{n+1} |n+1\rangle$$

$N := b^\dagger b$ „Teilchenzahl“ op. der Schwingungsquanten


$$N|n\rangle = \underbrace{b^\dagger b |n\rangle}_{\sqrt{n} |n-1\rangle} = n|n\rangle$$

$$\sqrt{n} \sqrt{n+1} |n\rangle$$

in Übereinstimmung mit

$$H|n\rangle = \hbar\omega \left(N + \frac{1}{2} \right) |n\rangle = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right) |n\rangle$$

Unterschiede zur klass. Schwingung:

- diskrete Energien $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2} \right)$
- Nullpunktenergie $E_0 = \frac{1}{2} \hbar\omega$
- Unschärfe-Bez. x und p nicht zugleich scharf
 $\Delta x \Delta p = \hbar \left(n + \frac{1}{2} \right)$
- Energie scharf \Rightarrow Schwingungs-Phase unbestimmt
 Aufenthaltswahrscheinl.
- Phase scharf (kohärenter Zustand)
 \Rightarrow kein Energieeigenzustand
(nicht stationär, schwing. Gauß-Wellenpaket)
Überlagerung vieler Energien
„Glanzzustände“)
- Aufenthaltswahrsch. $\neq 0$ in klass. verbotenen Bereich (Tunneleffekt)
- große Energie (n groß) \rightarrow klass. Korrespondenzprinzip
 $E \gg \hbar\omega = 25 \text{ meV}$
 $\approx 10^{-27} \text{ kWh}$