Wdh. 5.6. Wechselwirkung zwischen Elektronen und Löchern

$$\hat{H}_D = \sum_k d_k^+ d_k \left(\frac{\hbar k^2}{2 m_V} - E_{g,V} \right)$$

positive effektive Masse
pos. Ladung bei WW mit äußeren Feldern

$$\hat{H} = \int \hat{\psi}^+(x)\, h(x)\, \psi(x)\, d^3x + \frac{1}{2} \iint \hat{\psi}^+(x)\, \hat{\psi}^+(x') \frac{e^2}{|x-x'|} \psi(x')\psi(x)\, d^3x'\, d^3x$$

Zerlegung der Feldoperatoren in Valenz + Leitungsbandanteil

$$\hat{\psi}^+(x) = \sum_k a_{k,V}^+ \varphi_{k,V}^*(x) + \sum_k a_{k,L}^+ \varphi_{k,L}^*(x)$$

$\varphi_{k,L}$: WF seien gegeben durch $H_{eff}\varphi = E\varphi$
und bestmöglich selbstkonsistent bestimmt

Vertauschungsrelationen

$$\{ a_{k,i}, a_{k',j}^+ \} = \delta_{kk'}\delta_{ij}$$

es gilt: $\langle ki | k'j \rangle = \delta_{kk'}\delta_{ij}$, $i,j \in L,V$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} = H_0 + H_{WW}$$

$$H_0 = \sum_{kk'ij} a^\dagger_{ki} a_{k'j} \langle ki|h|k'j\rangle$$

$$H_{WW} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{k_1k_2k_3k_4 \\ j_1j_2j_3j_4}} a^\dagger_{k_1j_1} a^\dagger_{k_2j_2} a_{k_3j_3} a_{k_4j_4} \langle k_1j_1 k_2j_2|V|k_3j_3 k_4j_4\rangle$$

Mit: $a^\dagger_{kV} a_{k'V} = 1 - d^\dagger_k d_k \qquad (a^\dagger_{kV} \rightarrow d_k)$

$a^\dagger_{kL} a_{kL} = a^\dagger_k a_k$

3.6.1 WW mit Erhaltung der Teilchenzahl (Exzitonen)

Annahme: Erhaltung der Elektronenzahl im Valenzband und Leitungsband (keine Interbandübergänge) ← später

Zerlegung der Summe in $\hat{H}_{WW}$

identische Beiträge   identische Beiträge

$$\sum_{\substack{k_i = k_1k_2k_3k_4 \\ j_i = j_1j_2j_3j_4}} = \underbrace{\sum_{\substack{k_i \\ j_i \in L}}}_{H_{LL}} + \underbrace{\sum_{\substack{k_i \\ j_i \in V}}}_{H_{VV}} + \underbrace{\underbrace{\sum_{\substack{k_i \\ j_1j_4 \in V \\ j_2j_3 \in L}} + \sum_{\substack{k_i \\ j_1j_4 \in L \\ j_2j_3 \in V}}}_{H_{LV}^{(1)}} + \underbrace{\sum_{\substack{k_i \\ j_1j_3 \in V \\ j_2j_4 \in L}} + \sum_{\substack{k_i \\ j_1j_3 \in L \\ j_2j_4 \in V}}}_{H_{LV}^{(2)}}}_{H_{LV}}$$

H_{LL}: WW der LB-El untereinander

H_{VV}: WW der VB-El

H_{LV}: WW zwischen Elektronen und Löchern

$$H_{LL} = \frac{1}{2} \sum_{k_i} a^\dagger_{k_1} a^\dagger_{k_2} a_{k_3} a_{k_4} \langle k_1 k_2|V|k_3 k_4\rangle$$

$$H_{VV} = \frac{1}{2} \sum_{k_i} d_{k_1} d_{k_2} d^\dagger_{k_3} d^\dagger_{k_4} \langle k_1 k_2|V|k_3 k_4\rangle$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k_i} \Big\{ \delta_{k_2k_3}\delta_{k_1k_4} - \delta_{k_1k_3}\delta_{k_2k_4} - \delta_{k_2k_3} d^\dagger_{k_4} d_{k_1} + \delta_{k_1k_3} d^\dagger_{k_4} d_{k_2} - \delta_{k_1k_4} d^\dagger_{k_3} d_{k_2} + \delta_{k_2k_4} d^\dagger_{k_3} d_{k_1} + \underbrace{d^\dagger_{k_3} d^\dagger_{k_4} d_{k_1} d_{k_2}}_{\text{WW der Defektelektronen}} \Big\} \langle k_1 k_2|V|k_3 k_4\rangle$$

$$\hat{H}^{(1)}_{LV} = \sum_{k_i} \Big(\underbrace{a^\dagger_{k_1} a_{k_4} \delta_{k_2k_3}}_{\text{WW eines Elektrons mit vollem VB}} - \underbrace{a^\dagger_{k_1} a_{k_4} d^\dagger_{k_3} d_{k_2}}_{\text{Streuung eines Elektrons am Loch}} \Big) \langle k_{1L} k_{2V}|V|k_{3V} k_{4L}\rangle$$

$\hat{H}^{(2)}_{LV}$ = Austauschterm (Vertauschung von $k_1 \leftrightarrow k_2$)

$\Rightarrow \hat{H} = H_{el} + H_D + H_{el-D} + H_{D-D} + H_{el-el} + W_{voll}$

- H_{el}: Energie des El im LB ohne WW
- H_D: Energie der Löcher ohne WW
- H_{el-D}: WW zwischen El und Löchern
- $H_{D-D} + H_{el-el}$: WW im VB bzw LB
- W_{voll}: Energie des vollen Valenzbands

$$H_{el-D} = \sum_{k_i} \Big(- a^+_{k_1} a_{k_2} d^+_{k_3} d_{k_4} \langle k_{1L} k_{2V} | V | k_{3V}, k_{4L} \rangle + a^+_{k_2} a_{k_4} d^+_{k_3} d_{k_1} \langle k_{1V} k_{2L} | V | k_{3V} k_{4L} \rangle \Big)$$

Fall: nur ein Loch + ein Elektron

Ansatz für Eigenfunktionen von H_{el-D}: Zweiteilchensystem

$$|\phi\rangle = \sum_{k_1 k_2} c_{k_1 k_2} a^+_{k_1} d^+_{k_2} |\phi_0\rangle$$

$\Rightarrow$ Wasserstoff-ähnliches EW-Spektrum

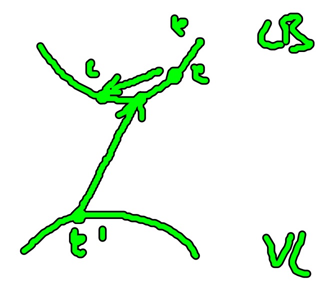
Exziton!

3.6.2 WW ohne Teilchenzahlerhaltung

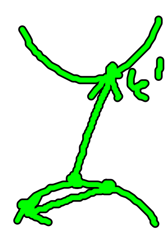
$\Rightarrow H_{VL}$ enthält noch weitere als die bei 3.6.1. diskutierten Glieder

Band-Band Übergang

e Stoßionisation (e + h stoßen $\to$ 2e)



h-Auger Rekombination (h + h stoßen $\to$ e + h)

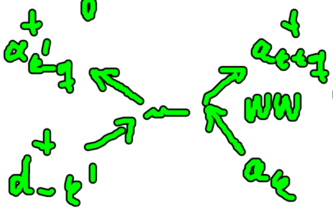


$$\sum_{k_i j_i} \to \underbrace{\sum_{LLLV} + \sum_{LLVL}}_{e\text{-Auger Rekombination}} + \underbrace{\sum_{LVLL} + \sum_{VLLL}}_{e\text{-Stoßionisation}} \Big\} \hat{H}^e_{ii}$$

$$+ \underbrace{\sum_{LVVV} + \sum_{VLVV}}_{h\text{-Auger Rekomb.}} + \underbrace{\sum_{VVLV} + \sum_{VVVL}}_{h\text{-Stoßionisation}} \Big\} \hat{H}^h_{ii}$$

$$H_{ii}^{c} = \underbrace{\sum_{kk'q} M_q^c\, a^+_{k+q}\, a^+_{k'-q}\, d^+_{-k'}\, a_k}_{\text{Stoßionisation}} + \underbrace{\sum_{kk'q} M^c_{-q}\, a^+_{k+q}\, d_{-(k'-q)}\, a_{k'}\, a_k}_{\text{Auger}}$$

stellt Impulserhaltung sicher



Impuls nachher: $k'+k$

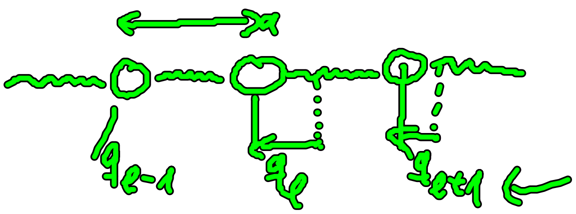
WW ist die Coulomb-WW

Impuls vorher: $k'+k$

3.7. Phononen: 3.7.1 Die lineare Kette

Gitterabstand a mit Masse M

N Anzahl der Atome



zeitabhängige Auslenkungen des l-ten Gitterions

(1) $M\ddot q_l = K(q_{l+1} - q_l) - K(q_l - q_{l-1}) = K(q_{l+1} + q_{l-1} - 2q_l)$

zyklisch geschlossen $q_\nu = q_{\nu+N}$

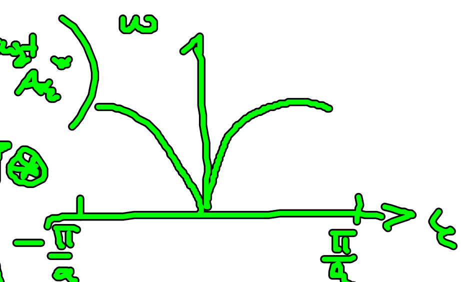
<u>Ansatz</u>: ebene Wellen $q_l(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikla} B_k(t)$ Wellenzahl $k = \frac{2\pi n}{N}$ ganze Zahl

einsetzen in (1)

$\longrightarrow \ddot B_k = \frac{K}{M}\left(e^{ika} - e^{-ika} - 2\right) B_k$ einfache Schwingungsgl.

Ansatz: $B_k = e^{-i\omega_k t} A_k \longrightarrow \omega_k = 2\sqrt{\frac{K}{M}}\left|\sin\frac{ka}{2}\right|$

$\longrightarrow q_l = \sum_k \left(\frac{1}{\sqrt{N}} e^{ikla} e^{-i\omega_k t} A_k + \frac{1}{\sqrt{N}} e^{-ikla} e^{i\omega_k t} A_k^*\right)$



$$\boxed{q_l = \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{2MN\omega_k}}\left(b_k + b^*_{-k}\right) e^{ikla}} \quad (*)$$

$a_k = A_k\sqrt{\frac{2M\omega_k}{\hbar}}, \quad b_k = e^{-i\omega_k t} a_k$

Impulse: $p = M\dot q_l \Rightarrow p_l = -i\sum_k \sqrt{\frac{\hbar M\omega_k}{2N}}\left(b_k - b^+_{-k}\right) e^{ikla}$

$$\Rightarrow \quad T = \sum_{l=1}^{N} \frac{M}{2} \dot{q}_l^2$$

$$V = \frac{1}{2} K \sum_{l=1}^{N} (q_l - q_{l+1})^2$$

$\Rightarrow$ Lagrange Funktion $\mathcal{L}$ bekannt

Legendre Trafo $\longrightarrow$ Hamiltonfunktion H

$$H = \sum_l p_l \dot{q}_l - L(q, \dot{q}, t)$$ einsetzen der Lösungen (*)

$$\Rightarrow \quad H = \sum_k \hbar\omega_k \frac{1}{2} (b_k^+ b_k + b_k b_k^+)$$

Quantentheoretische Behandlung: Vertauschungsrel. fordern zwischen Ort und Impuls

$$[\hat{q}_l, \hat{q}_j] = 0$$

$$[\hat{q}_l, \hat{p}_j] = \delta_{lj} \frac{\hbar}{i}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H}_{ph} = \sum_k \hbar\omega_k \hat{b}_k^+ \hat{b}_k + \frac{1}{2}\hbar\omega_k$$

Erzeugung eines Schwingungszustands mit Wellenvektor $\underline{k}$ $\equiv$ Phononen

Wegen obiger Vertauschungsrelation $\longrightarrow$ $[b_k, b_l^+] = \delta_{kl}$

$[b_k, b_l] = 0$

$\Rightarrow$ Phononen sind Bosonen

3.1.2 Wechselwirkung zwischen Phononen und Elektronen