

## English Summary:

Defect electrons  $d_k^+ = a_{vk}^+$  (holes)  $d_k = a_{vk}^+$  valence band electrons  $a_{kv}^+ a_{kv} = 1 - d_k^+ d_k$

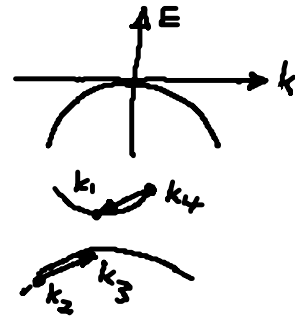
$$H_D = - \sum_k d_k^+ d_k \epsilon_{kv}, \quad \epsilon_{kv} = \epsilon_{0v} - \frac{\hbar^2 k^2}{2m_v}$$

electron-hole interaction: exciton

$$H_{el-D} = \sum_{k_i} (- a_{k_1}^+ a_{k_4} d_{k_3}^+ d_{k_2}^+ \langle k_{1L} k_{2V} | V | k_{3V} k_{4L} \rangle$$

$$+ a_{k_2}^+ a_{k_4} d_{k_3}^+ d_{k_1}^+ \langle k_{1V} k_{2L} | V | k_{3V} k_{4L} \rangle$$

exchange interaction  $k_1 \leftrightarrow k_2$



impact ionization:

$$H_{ii}^e = \sum_{\underline{k}, \underline{k}', \underline{q}} M_{\underline{q}}^e a_{\underline{k}+\underline{q}}^+ a_{\underline{k}}^+ d_{\underline{k}'}^+ a_{\underline{k}} + \sum_{\underline{k}, \underline{k}', \underline{q}} M_{-\underline{q}}^e a_{\underline{k}}^+ a_{\underline{k}'}^+ d_{-(\underline{k}'+\underline{q})}^+ a_{\underline{k}'}^+ a_{\underline{k}}$$



$e \rightarrow 2e + h$

Auger recombination:



$2e + h \rightarrow e$

phonons:

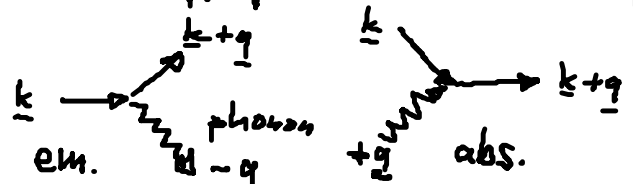
$$H_{ph} = \sum_{\underline{q}} \hbar \omega_{\underline{q}} b_{\underline{q}}^+ b_{\underline{q}} + \frac{1}{2} \sum_{\underline{q}} \hbar \omega_{\underline{q}}$$

bosons:  $[b_{\underline{q}}, b_{\underline{q}}^+] = 1$

el.-phonon interaction:

$$H_{e-ph} = \sum_{\underline{k}, \underline{q}} M_{\underline{q}} (b_{-\underline{q}}^+ + b_{\underline{q}}) a_{\underline{k}+\underline{q}}^+ a_{\underline{k}}$$

em. abs.



## 4. Quantenstatistik

### 4.1 Dichtematrix - statistischer Operator

#### 4.1.1 Erwartungswerte

(i) (bisher) Reine Zustände

Wahrscheinlichkeit für das Resultat  $|\alpha\rangle$  im reinen Zust.  $|\psi\rangle$   
 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1$

$$|\langle \alpha | \psi \rangle|^2 = \langle \psi | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle = \langle \psi | \hat{P}_\alpha | \psi \rangle = |c_\alpha|^2$$

Projektor inhärenter statist. Charakter!

Erwartungswert von  $\hat{M}$  im Zustand  $|\psi\rangle$ :

$$\langle \hat{M} \rangle = \langle \psi | \hat{M} | \psi \rangle = \sum_\alpha \langle \psi | \hat{M} | \alpha \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \quad \text{⊗}$$

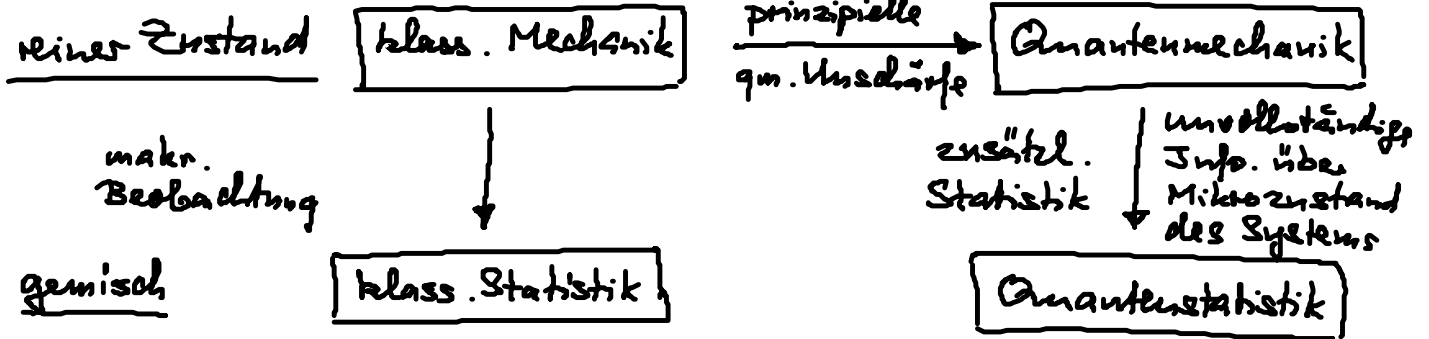
$$= \sum_{\alpha, \alpha'} \langle \psi | \alpha' \rangle \langle \alpha | \psi \rangle \underbrace{\langle \alpha' | M | \alpha \rangle}_{M_{\alpha' \alpha}}$$

falls  $|\alpha\rangle$  Eigenbasis  
 $= \sum_{\alpha} |\langle \alpha | \psi \rangle|^2 M_{\alpha \alpha}$   
 Eigenwerte von  $\hat{M}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_{\alpha} \langle \alpha | \psi \rangle \underbrace{\langle \psi | \hat{M} | \alpha \rangle}_{P_{\psi}}$$

$$= \text{tr}(P_{\psi} \hat{M})$$

trace = Spur



(ii) Quantenmech. Gemischt

- unvollständige Info über Mikrozustand  
 also Wahrscheinlichkeitsverteilung  $p_i$  über die  
 möglichen reinen Zustände  $|\psi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{reell}}$

$$\langle \hat{M} \rangle = \sum_i p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_i \rangle \quad \text{wobei } \sum_i p_i = 1$$

$$= \sum_{i,j} p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle \langle \psi_j | \psi_i \rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle \psi_j | \psi_i \rangle p_i \langle \psi_i | \hat{M} | \psi_j \rangle$$

$$= \sum_j \langle \psi_j | \hat{\rho} \hat{M} | \psi_j \rangle$$

$$\hat{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle \psi_i|$$

statistischer Op.

= Dichtematrix

$$\langle \hat{M} \rangle = \text{tr} \hat{\rho} \hat{M}$$

Es gilt:  $\text{tr} \hat{\rho} = 1$

$$\hat{\rho}^2 \neq \hat{\rho}$$

$$\text{tr} \hat{\rho}^2 < 1$$

$$\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$$

} Gleichheit gilt nur für reine Zustände  
 $(\hat{\rho} = \hat{\rho}^2, \hat{\rho}^2 = \hat{\rho})$

hermitesch

Mittelwert eines Projektionsoperators  $|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|$

$$\text{tr}(|\varphi_n\rangle\langle\varphi_n|\hat{\rho}) = \sum_i p_i |\langle\varphi_n|\psi_i\rangle|^2 = \sum_i p_i |c_n^i|^2$$

$\hat{=}$  Wahrscheinlichkeit, den Zustand  $|\varphi_n\rangle$   
bei Messung zu erhalten

Bem.: reine Zustände  $\rightarrow$  kohärente Überlagerung von  
Wahrscheinlichkeitsamplituden

$$\langle\hat{M}\rangle = \sum_{\alpha\alpha'} \langle\psi|\alpha\rangle \langle\alpha|\hat{M}|\alpha'\rangle \langle\alpha'|\psi\rangle$$

$\swarrow$   $\nwarrow$   
qm. Phasen

$\Rightarrow$  Interferensterme, falls  $M$  nicht diagonal  
in  $|\alpha\rangle$

Gemisch  $\rightarrow$  inkohärente Überlagerung von reinen Zust.  
 $\Rightarrow$  keine Interferenz!

### 4.1.2 Liouville-von-Neumann-Gleichung

zeitentwicklung der Dichtematrix im Schrödingersbild  
(Zust.zeitabh.)

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi_i\rangle = \hat{H} |\psi_i\rangle$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \langle\psi_i| = \langle\psi_i| \hat{H}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = \sum_i p_i (|\dot{\psi}_i\rangle\langle\psi_i| + |\psi_i\rangle\langle\dot{\psi}_i|)$$

$$= -\frac{i}{\hbar} \sum_i p_i (\hat{H} |\psi_i\rangle\langle\psi_i| - |\psi_i\rangle\langle\psi_i| \hat{H})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{\rho}]$$

Vorsicht: nicht verwechseln mit  
Bewegungsgl. für Op.  
im Heisenbergbild  
(dort anderes Vorzeichen!)

Liouville-von-Neumann-Gl.

- Quantenmechan. Analogon zur Liouville-Gl. der klass. Mech.

Bemerkung: • Für 1 Teilchen im 2-Niveaus-System (Basis: 2-Zust.)  
 ist  $\hat{\rho}$  eine  $2 \times 2$ -Matrix, d.h. v. Neumann- $\rho$ .  
 liefert 4 gln.

• Für Vielteilchensystem (Halbleiter mit 2 Bändern)  
 wird Basis im Fockraum benötigt

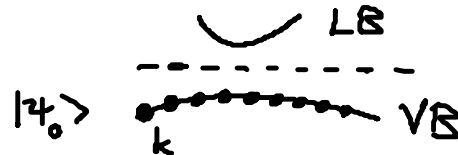
### 4.1.3. Verteilungsfkt. der Elektronen/Löcher im Halbleiter

Betrachte  $\langle a_k^+ a_k \rangle$  Mittelwert der Besetzungszahl.

im gemischten Zustand  $\hat{\rho} = \sum_i p_i |\varphi_i\rangle \langle \varphi_i|$

$|\varphi_i\rangle \in \mathcal{H}^{\text{Fock}}$ : mögliche Verteilung der Elektronen  
 (Vielteilch.zust.) auf erlaubte 1-Teilchen-Zustände  $k$   
 (erine Zustände)

Beisp. HL: Grundzustand bei  $T=0$



$$\langle a_k^+ a_k \rangle = \text{tr} (\hat{\rho} a_k^+ a_k)$$

$$= \sum_i p_i \langle \varphi_i | a_k^+ a_k | \varphi_i \rangle$$

$$= \sum_i p_i n_k^i$$

$n_k^i$  Besetzung des 1-T.-Zust.  $k$   
 im Vielteilchen-Zust.  $|\varphi_i\rangle$   
 $n_k^i = 0, 1$

$$= f_e(k) \quad \underline{\text{Verteilungsfkt.}}$$

(Max. von  $f_e(k)$ :  $n_k^i = 1 \forall i \Rightarrow f_e(k) = \sum_i p_i = 1$ )

$f_e(k)$  ist die Wahrscheinlichkeit, ein El. bei  $k$  zu finden

- im reinen Zustand  $f_e(k) = 0$  oder  $f_e(k) = 1$
- im Gemisch  $0 \leq f_e(k) \leq 1$
- im thermodyn. Gleichgewicht ist  $f_e(k)$  die Fermi-Verteilung  
 (s. § 4.4)

Analog  $\langle d_k^+ d_k \rangle = f_h(k) \quad \underline{\text{Loch-Verteilungsfkt.}}$

Bem.: Falls Spin als extra Quantenzahl betrachtet wird:  $f_e(k) = \frac{1}{2} \sum_s \langle a_{ks}^\dagger a_{ks} \rangle$

## 4.2 Semiklass. WW mit Licht

- WW mit opt. Lichtfeld verursacht Abweichung der Elektronenverteilung vom thermodyn. Gleichgew.

⇒ Ham. op.  $\hat{H}_{opt}$

Dipolkopplung an elekt. Feld  $\underline{E}(\underline{r}, t)$ , z.B. Laserpuls (extern, klass. beschrieben)

$$\hat{H}_{opt} = e \underline{r} \cdot \underline{E}(\underline{r}, t) \quad \text{mit qm. d. Dipol-Op.}$$

(halbklassisch: keine Feldquantisierung des Lichtes)

### 4.2.1 Polarisation des Halbleiters

qm. Dipoldichte (vgl. klass. el. Dipolmomentdichte)

$$\hat{\underline{P}}(\underline{r}, t) = e \hat{\underline{r}}^+(\underline{r}, t) \underline{r} \hat{\underline{r}}(\underline{r}, t) \quad \hat{\underline{r}}^+, \hat{\underline{r}} \text{ sind Feldop.}$$

Def. Polarisation  $\underline{P}$  als Erwartungswert des Dipoldichteop.  $\hat{\underline{P}}$

$$\underline{P}(\underline{r}, t) = \langle \hat{\underline{P}} \rangle = \langle e \hat{\underline{r}}^+(\underline{r}, t) \underline{r} \hat{\underline{r}}(\underline{r}, t) \rangle$$

reelle Größe