English Summary:

4.5 Ideal Bose gas

Bose distribution $\boxed{\langle N_j \rangle = \dfrac{1}{\exp\left[\frac{E_j-\mu}{kT}\right]-1}}$

$pV = kT \ln \Xi = \frac{2}{3} U$

nondegenerate limit: $U \approx \frac{3}{2} kT \bar{N} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N}\right]$ caloric

$\zeta = e^{\frac{\mu}{kT}} \ll 1$

$\underbrace{pV \approx kT\bar{N}}_{\text{classical ideal gas}} \left[1 - \frac{1}{2^{5/2}} \frac{\lambda^3}{V(2S+1)} \bar{N}\right]$ thermal eq. of state

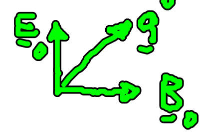
(↑ Bose attraction)

4.6 Das Photonengas im Strahlungshohlraum

Elektromagn. Strahlung in einem ladungs- u. stromfreien Hohlraum im thermischen Gleichgewicht:

$$\left.\begin{aligned} \underline{E}(\underline{r},t) &= \underline{E}_0 e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega(q)t)} \\ \underline{B}(\underline{r},t) &= \underline{B}_0 e^{i(\underline{q}\cdot\underline{r}-\omega(q)t)} \end{aligned}\right\} \text{ebene Wellen als Lösung der Maxwellgln.}$$

mit $\underline{E}_0 \cdot \underline{B}_0 = 0$, $\underline{q}\cdot\underline{E}_0 = \underline{q}\cdot\underline{B}_0 = 0$



transversale Welle!

und $\omega(q) = c|\underline{q}|$ c Lichtgeschwindigkeit

Quantisierung des elektromagn. Feldes:

harmon. Osc. der Frequenz $\omega(q) \Rightarrow E_q = \hbar\omega(q)(n_q + \frac{1}{2})$

$n_q = 0, 1, 2, \ldots$

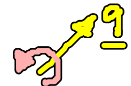
Interpretation von n_q als Zahl der Schwingungsquanten oder Photonen mit Energie $\hbar\omega(q)$ und Impuls $\hbar\underline{q}$.

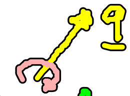
Photonen sind Bosonen (da $n_q = 0, 1, 2, 3, \ldots$ möglich) mit Spin $S = 1$,

Aber: Spin-Entartungsgrad nur 2 (2 Spinzustände)

$\hat{=}$ 2 Polarisationsrichtungen (linkszirkular u. rechtszirkular)

$\underline{S} \uparrow\downarrow \underline{q}$ $\qquad$ $\underline{S} \uparrow\uparrow \underline{q}$





Die 3. Einstell.möglichkeit des Spins tritt nicht auf (keine „longitudinalen Photonen", Lichtgeschw. c, da Ruhmasse $m_0 = 0$)

Im therm. Gleichgewicht des Photonengases mit den Wänden („Hohlraumstrahlung") werden ständig Photonen emittiert u. absorbiert. Ihre Anzahl $\bar{N}$ ist deshalb bereits durch T und V festgelegt und daher keine unabhängige Nebenbed. $\Rightarrow$ kanon. Ensemble

Formal: Setze $\boxed{\mu = 0}$ in der Boseverteilung

chem. Pot.

$$\bar{N} = 2\sum_{\underline{q}} \frac{1}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1} = 2\sum_{\underline{q}} \langle N_{\underline{q}} \rangle$$

$$U = 2\sum_{\underline{q}} \frac{\hbar\omega(q)}{\exp\left\{\frac{\hbar\omega(q)}{kT}\right\} - 1}$$

2 Polarisationsrichtungen

Übergang zum Quasi-Kontinuum

$\omega = cq$

$$2\sum_{\underline{q}} \longrightarrow \frac{2V}{h^3}\int d^3(\hbar\underline{q}) = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3}\int_0^\infty dq\, q^2 = \frac{8\pi V}{(2\pi)^3 c^3}\int_0^\infty d\omega\, \omega^2$$

$$= \frac{8\pi V}{c^3}\int_0^\infty d\nu\, \nu^2 \quad \text{mit } \omega = 2\pi\nu$$

$\Rightarrow$ Zustandsdichte der Photonen $\boxed{D(\nu) = \frac{8\pi V}{c^3}\nu^2}$

$$\bar{N} = \int_0^\infty d\nu\, D(\nu) \langle N_\nu \rangle$$

$$U = \int_0^\infty d\nu\, D(\nu)\, h\nu \langle N_\nu \rangle$$

spektrale Energiedichte der Strahlung:

$$\boxed{u(\nu,T) := \frac{1}{V} D(\nu)\, h\nu \langle N_\nu \rangle = \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{e^{h\nu/(kT)} - 1}}$$

Planck'sche Strahlungsformel

Grenzfälle: $h\nu \ll kT$: $u(\nu,T) \approx \frac{8\pi h}{c^3} \frac{\nu^3}{h\nu/(kT)} = \frac{8\pi}{c^3} \nu^2 kT$

Rayleigh-Jeans-Gesetz

(klass. Resultat, $\nu \to 0$)

$h\nu \gg kT$: $u(\nu,T) \sim \nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}$

(W. Wien, empir. Resultat, $\nu \to \infty$)
für irdische Lichtquellen,
versagt für Sonne, Fixsterne

Planck'sche Ableitung der Strahlungsformel (1900)

Postulat: Strahlungsenergie gequantelt,
$E_n = n h\nu$ in Zustandssumme,

damit konnte Max Planck erstmals die Strahlung schwarzer Körper (d.h. vollständig absorbierender Strahlungshohlräume im thermodynamischen Gleichgewicht) erklären u. zwischen Rayleigh-Jeans und Wien interpolieren.

$\Rightarrow$ historischer Ausgangspunkt der Quantentheorie (14.12.1900)

Maximum der spektralen Energiedichte für $h\nu \gg kT$:

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \frac{\partial}{\partial \nu}\left(\nu^3 e^{-a\frac{\nu}{T}}\right) = \left(3 - a\frac{\nu}{T}\right)\nu^2 e^{-a\frac{\nu}{T}} \stackrel{!}{=} 0$$

$\rightarrow \boxed{\nu_{max} \sim T}$ Wien'sches Verschiebungsgesetz

Gesamtenergie:

$$U(T) = V\frac{8\pi h}{c^3}\int_0^\infty d\nu\, \frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} = V\frac{8\pi}{(ch)^3}(kT)^4 \underbrace{\int_0^\infty dx\, \frac{x^3}{e^x-1}}_{\frac{\pi^4}{15}}$$

$$\boxed{U(T) = V\frac{8\pi^5}{15(ch)^3}(kT)^4}$$ Stefan-Boltzmann-Gesetz

Wärmekapazität: $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \sim T^3$

Strahlungsdruck:

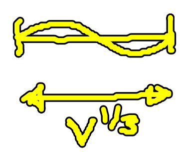
Aus $p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$ folgt mit der kanon. Zustandssumme Z

$$F = -kT\ln Z = kT\sum_\nu \ln\left(1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)$$

$$p = kT\left(\frac{\partial}{\partial V}\ln Z\right)_T = -kT\sum_\nu \frac{\frac{h\left(\frac{\partial\nu}{\partial V}\right)}{kT}\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}}$$

Mit dem Vol. V ändert sich die Frequenz ν einer steh. Welle

$$\nu = \frac{c}{\lambda} \sim V^{-1/3}$$



$$\frac{\partial\nu}{\partial V} = -\frac{1}{3}\frac{\nu}{V} \sim V^{-4/3}$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{3V}\sum_\nu \frac{h\nu\, e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1-e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{1}{3V}\sum_\nu h\nu\langle N_\nu\rangle$$

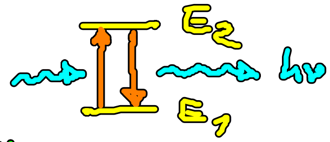
$$\boxed{p = \frac{1}{3}\frac{U}{V}}$$ Strahlungsdruck

Einstein'sche Ableitung der Planck'schen Strahlungsformel

(1917)

Einstein (1905): Lichtquantenhypothese → „Photonen"
(Photoeffekt)

Im Strahlungshohlraum: 2-Niveau-Atome
(Energie-Entartung g_1, g_2)



Im therm. Gleichgewicht gilt für die mittleren Besetzungszahlen der elektron. Atomniveaus (Fermionen)

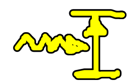
$$\frac{\langle N_2\rangle}{\langle N_1\rangle} = \frac{g_2\, p(E_2)}{g_1\, p(E_1)} \underset{\uparrow}{=} \frac{g_2 e^{-\beta E_2}}{g_1 e^{-\beta E_1}} = \frac{g_2}{g_1} e^{-\beta \underbrace{(E_2 - E_1)}_{h\nu}}$$

$$p(E_i) = Z^{-1} e^{-\beta E_i}$$

Im therm. Gleichgewicht werden im Mittel gleich viele Photonen emittiert u. absorbiert.

<u>Rate</u> (= Zahl der Übergänge pro Zeit u. Vol.)

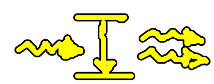
(i) <u>Absorption</u> $E_1 \to E_2$: $B_{12}\, \underset{\text{Photonenzahl}}{u(\nu,T)} \langle N_1\rangle$



(ii) <u>spontane Em.</u> $E_2 \to E_1$: $A_{21}\langle N_2\rangle$

$\tau = \frac{1}{A_{21}}$ Lebensdauer

(iii) <u>erzwungene Em.</u> $E_2 \to E_1$: $B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$



(von Einstein <u>neu</u> eingeführt!

$\Longrightarrow$ Grundlage von Maser 1954, Laser 1961)

Bilanzgl.:

$$B_{12}\, u(\nu,T)\langle N_1\rangle = A_{21}\langle N_2\rangle + B_{21}\, u(\nu,T)\langle N_2\rangle$$

Einsteinkoeffizienten

$$\Longrightarrow \quad u(\nu,T) = \frac{A_{21}}{B_{12}\frac{g_1}{g_2} e^{\beta h\nu} - B_{21}}$$

<u>Postulate</u> (i) $\lim_{T\to\infty} u(\nu,T) = \infty \quad \Longrightarrow \quad \boxed{B_{12}\frac{g_1}{g_2} = B_{21}}$

$$\Longrightarrow \quad u(\nu,T) = \frac{a}{e^{\beta h\nu} - 1}$$

(ii) Für $kT \gg h\nu$ gilt Rayleigh-Jeans:

$$\lim_{T\to\infty} u(\nu,T) = \frac{8\pi}{c^3}\nu^2 kT \Rightarrow \boxed{a = \frac{8\pi}{c^3} h\nu^3}$$

$\Longrightarrow$ Planck

<u>NB</u>: Verallgemeinerung auf Elektronensysteme im <u>Nichtgleichgewicht</u>

$\longrightarrow$ Photonen mit eff. chem. Potenzial $\mu \neq 0$

[Peter Landsberg, J. Phys. C <u>14</u>, L1025 (1981) $\quad \mu = F_n - F_p$]

Schöll & Landsberg, J. Opt. Soc. Am. <u>73</u>, 1197 (1983)

$\longrightarrow$ Anwendung Laser

(Laserbedingung $F_n - F_p = E_{gap}$ Halbleiterlaser)

Differenz der Quasi-Fermi-Niveaus

fern vom thermodyn. Gleichgewicht:

<u>Nichtgleichgewichts-Phasenübergang</u>