English Summary:

4.6 Photon gas in cavity

spectral energy density of black body radiation:

$$\boxed{u(\nu,T) = \frac{8\pi h}{c^3}\,\frac{\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}}$$ Planck's radiation formula

total energy:

$$U(T) = V\int_0^\infty u(\nu,T)\,d\nu = V\frac{8\pi^5}{15(ch)^3}(kT)^4$$ Stefan-Boltzmann Law

radiation pressure: $p = \frac{1}{3}\frac{U}{V}$

Einstein's derivation of Planck's formula:

$$\underbrace{B_{12}\,u(\nu,T)\langle N_1\rangle}_{\text{absorption}} = \underbrace{A_{21}\langle N_2\rangle}_{\text{spontaneous}} + \underbrace{B_{21}\,u(\nu,T)\langle N_2\rangle}_{\text{stimulated}}$$

emission

5. Näherungsmethoden

5.1 Zeitabhängige Störungsrechnung (Dirac)

Es soll die zeitliche Entwicklung eines Zustandes $|\psi\rangle_t$ aus der Schrödingergl.

$$\hat H\,|\psi\rangle_t = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle_t$$

berechnet werden, wobei

$$\hat H = \hat H^0 + \hat H^1(t)$$

Störung $\hat H^1 = \varepsilon\hat V$ mit kleinem Par. $\varepsilon\in\mathbb{R}_+$
evt. explizit zeitabh.

Eigenwerte und -zustände von $\hat H^0$ seien bekannt:

$$\boxed{\hat H^0|n\rangle = E_n|n\rangle}$$ ungestörtes Problem

$\langle n|n'\rangle = \delta_{nn'}$ (diskretes Spektrum)

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = 1$$

Entwicklung von $|\psi\rangle_t$ nach den ungestörten Eigenzuständen $|n\rangle$:

$$|\psi\rangle_t = \sum_n |n\rangle \underbrace{\langle n|\psi\rangle_t}_{c_n(t)} = \sum_n c_n(t)|n\rangle$$

Anfangsbed. sei ein ungestörter Eigenzustand $|n_0\rangle$:

$$|\psi\rangle_{t=0} = |n_0\rangle \quad \Rightarrow \quad c_n(0) = \delta_{nn_0}$$

Zeitentwicklung unter dem Einfluss der Störung:

$$i\hbar \sum_n \frac{dc_n}{dt}|n\rangle = \sum_n c_n(t)\big(\underbrace{\hat{H}^0|n\rangle}_{E_n|n\rangle} + \hat{H}^1(t)|n\rangle\big)$$

Linksmult mit $\langle m|$:

$$i\hbar \frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + \sum_n \langle m|\hat{H}^1|n\rangle c_n(t) \quad (*)$$

Def. $g_n(t)$ durch $c_n(t) = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}E_n t}}_{\substack{\text{Zeitentw. der ungestörten Zust.}\\ \text{(Lösung von (*) für } \varepsilon=0)}} g_n(t)$

$$\Rightarrow i\hbar\frac{dc_m}{dt} = E_m c_m(t) + e^{-\frac{i}{\hbar}E_m t}\, i\hbar\frac{dg_m}{dt}$$

in (*): $$\boxed{i\hbar\frac{dg_m}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}\right\}\langle m|\hat{H}^1|n\rangle g_n(t)}$$

Störungsentwicklung für kleines ε mit $\hat{H}^1 = \varepsilon\hat{V}$:

$$g_n(t) = g_n^{(0)}(t) + \varepsilon g_n^{(1)}(t) + \varepsilon^2 g_n^{(2)}(t) + \dots$$

<u>Koeffizientenvergleich</u> in Ordnung ε^ν:

<u>$\nu=0$</u>: $i\hbar\frac{dg_m^{(0)}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{g_m^{(0)}(t) = \text{const.} \overset{!}{=} \delta_{mn_0}}$

<u>$\nu=1$</u>: $$i\hbar\frac{dg_m^{(1)}}{dt} = \sum_n \exp\left\{\frac{i(E_m-E_n)t}{\hbar}\right\}\langle m|\hat{V}|n\rangle \underbrace{g_n^{(0)}}_{}$$

$$= \exp\left\{\frac{i(E_m - E_{n_0})t}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle \quad \delta_{m n_0}$$

Anf. bed. $g_n^{(1)}(0) = 0$

$$\Rightarrow \boxed{g_m^{(1)}(t) = \frac{1}{i\hbar} \int_0^t d\tau \, \exp\left\{\frac{i(E_m - E_{n_0})\tau}{\hbar}\right\} \langle m | \hat{V} | n_0 \rangle}$$

<u>Übergangswahrscheinlichkeit</u>

Wahrsch., zur Zeit t den Zustand $|n\rangle$ zu finden, wenn für $t=0$ $|n_0\rangle$ vorlag:

$$\left| \langle n | \psi \rangle_t \right|^2 = \left| \sum_{n'} c_{n'}(t) \underbrace{\langle n | n' \rangle}_{\delta_{nn'}} \right|^2 = |c_n(t)|^2 = |g_n(t)|^2$$

<u>Näherung</u>: niedrigste, nicht verschwindende Ordn. der Störungsrechnung

$$g_n(t) = \begin{cases} g_n^{(0)} = \delta_{nn_0} = 1 & \text{für } n = n_0 \\ \varepsilon g_n^{(1)} & \text{für } n \neq n_0 \end{cases}$$

(a) <u>zeitunabh. Störung</u>: $\hat{V} = \text{const.}$

$$g_n^{(1)}(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau \, \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})\tau}{\hbar}\right\} \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle$$

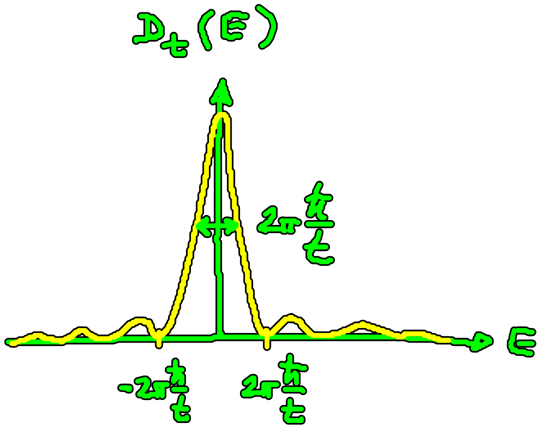
$$= -\langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \frac{\exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0})t}{\hbar}\right\} - 1}{E_n - E_{n_0}}$$

$$\left| g_n^{(1)}(t) \right|^2 = \left| \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \right|^2 \frac{(e^{-i\Omega t} - 1)(e^{i\Omega t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^2}$$

mit <u>Übergangsfrequenz</u> $\Omega := \frac{E_n - E_{n_0}}{\hbar}$

$$= \left| \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \right|^2 \frac{2(1 - \cos(\Omega t))}{\hbar^2 \Omega^2}$$

$$= \left| \langle n | \hat{V} | n_0 \rangle \right|^2 \underbrace{\frac{4 \sin^2\left(\frac{\Omega}{2} t\right)}{\hbar^2 \Omega^2}}$$



$$=: D_t(E_n - E_{n_0})$$

$$D_t(0) = \left(\frac{t}{\hbar}\right)^2 \xrightarrow{t\to\infty} \infty \qquad \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dE\, D_t(E) = \int_{-\infty}^{\infty} dE\, \frac{4}{E^2} \sin^2\underbrace{\left(\frac{Et}{2\hbar}\right)}_{\xi}$$

$$= \frac{2t}{\hbar} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, \frac{\sin^2\xi}{\xi}}_{\pi}$$

Also $D_t(E) =: \frac{2\pi}{\hbar}\, t\, \delta_t(E) \xrightarrow[t\to\infty]{} \frac{2\pi}{\hbar}\, t\, \delta(E)$

$$\Rightarrow \boxed{|\langle n|\psi_t\rangle|^2 = |g_n(t)|^2 \approx \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|\hat{H}^1|n_0\rangle|^2\, t\, \delta_t(E_n - E_{n_0})}$$

Für $t \to \infty$: Energieerhaltung $E_n - E_{n_0} = 0$

Für $t < \infty$ hat $D_t(E)$ die Breite $\Delta E \approx \frac{2\pi\hbar}{t}$

$\Rightarrow$ Energie-Zeit-Unschärferelation $\boxed{\Delta E \cdot t \approx 2\pi\hbar}$

Übergangswahrsch. pro Zeiteinheit (von n_0 nach n) = Rate :

$$\boxed{W_{nn_0} = \frac{d}{dt} \left|\langle n|\psi\rangle_t\right|^2 = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle n|\hat{H}^1|n_0\rangle|^2\, \delta(E_n - E_{n_0})}$$

(Fermi's goldene Regel ; Störungstheorie 1. Ordnung für $t \to \infty$)

(b) Harmon. zeitabh. Störung

$$\hat{H}^1(t) = \hat{F} e^{-i\omega t} + \hat{F}^+ e^{i\omega t} \qquad \text{(hermitesch!)}$$

$$g_n(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau\, \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)\tau}{\hbar}\right\} \langle n|\hat{F}|n_0\rangle$$

$$-\frac{i}{\hbar} \int_0^t d\tau\, \exp\left\{\frac{i(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)\tau}{\hbar}\right\} \langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle$$

$$= - \langle n|\hat{F}|n_0\rangle \frac{\exp\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)t\} - 1}{E_n - E_{n_0} - \hbar\omega}$$

$$- \langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle \frac{\exp\{\frac{i}{\hbar}(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)t\} - 1}{E_n - E_{n_0} + \hbar\omega}$$

$$|\langle n|\psi\rangle_t|^2 = |g_n|^2 = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|\hat{F}|n_0\rangle|^2 \, t \, \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)$$

$$+ \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle|^2 \, t \, \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$

gemischte Terme oszillieren für $\omega \neq 0$, $\Omega \neq 0$, für $t \to \infty$ vernachlässigbar gegen $\sim t\,\delta(\hbar\Omega^\pm)$

$$+ \underbrace{\langle n|\hat{F}|n_0\rangle^* \langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle}_{Ae^{-i\alpha}} \frac{(e^{-i\Omega^- t} - 1)(e^{i\Omega^+ t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+}$$

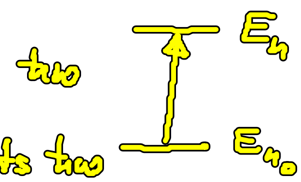
$$+ \underbrace{\langle n|\hat{F}^+|n_0\rangle^* \langle n|\hat{F}|n_0\rangle}_{Ae^{i\alpha}} \frac{(e^{-i\Omega^+ t} - 1)(e^{i\Omega^- t} - 1)}{\hbar^2 \Omega^- \Omega^+}$$

mit $\Omega^\pm := \Omega \pm \omega = \dfrac{E_n - E_{n_0} \pm \hbar\omega}{\hbar}$

<u>Übergangswahrscheinl. pro Zeit</u> für $t \to \infty$ von n_0 nach n:

$$W_{nn_0} = \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n|\hat{F}|n_0\rangle|^2 \, \delta(E_n - E_{n_0} - \hbar\omega)$$

Absorption eines Quants $\hbar\omega$



$$+ \frac{2\pi}{\hbar}|\langle n_0|\hat{F}|n\rangle|^2 \, \delta(E_n - E_{n_0} + \hbar\omega)$$

Emission eines Quants