English Summary:

6. Scattering Theory

$$\hat{H} = \hat{H}^0 + \hat{H}^1$$

Lippmann-Schwinger eq.

$$\boxed{|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \frac{1}{E - \hat{H}^0 + i\varepsilon}\hat{H}^1|\psi^{(+)}\rangle}$$

outgoing wave — incoming wave — scattered wave

green' fct. of free particle: $\hat{G}_+ = \frac{1}{E-\hat{H}^0+i\varepsilon}$ $\quad \boxed{(E-\hat{H}^0)\hat{G}_+ = 1}$

momentum representation ↓

$$\langle \underline{q}|\hat{G}_+|\underline{q}'\rangle = \frac{2m}{\hbar^2}\tilde{G}_+(q)\,\delta(\underline{q}-\underline{q}') \;, \quad \tilde{G}_+(q) = \frac{1}{k^2 - q^2 + i\eta}$$

Fourier trafo ↓

$$\langle \underline{r}|\hat{G}_+|\underline{r}'\rangle = \frac{2m}{\hbar^2}G_+(\underline{r}-\underline{r}') \;, \quad G_+(\underline{r}-\underline{r}') = -\frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}$$

$$\boxed{(\Delta + k^2)G_+(\underline{r}-\underline{r}') = \delta(\underline{r}-\underline{r}')}$$

Scattering potential $\hat{H}^1 = V$:

$$\boxed{\psi^+(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} - \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\, \frac{e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}V(\underline{r}')\psi^+(\underline{r}')}$$

Asymptot. Verhalten der Lippmann-Schwinger-Gl. für $|\underline{r}| \to \infty$:

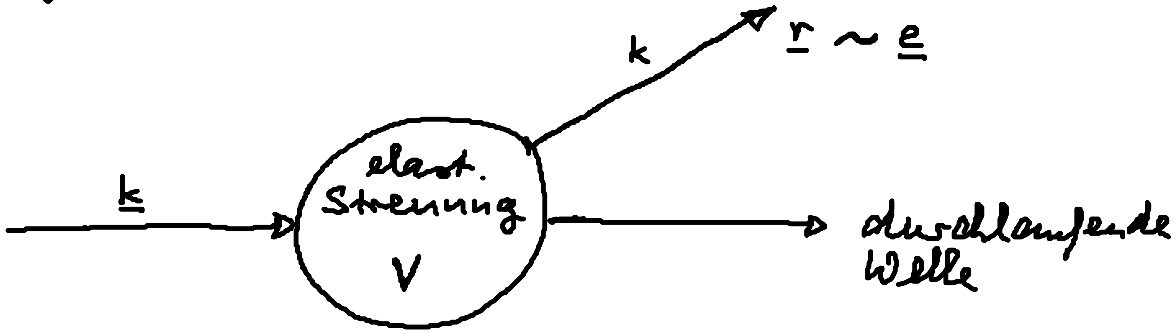
$$\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} \underbrace{e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}}_{\text{durchlaufende Welle}} - \frac{2m}{\hbar^2}\underbrace{\frac{e^{ikr}}{4\pi r}}_{\text{auslaufende Kugelwelle}}\int d^3r'\, e^{-ik(\underline{r}'\cdot\underline{e})}V(\underline{r}')\psi^+(\underline{r}')$$

$$\boxed{\psi^+(\underline{r}) \xrightarrow{r\to\infty} e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} + f(\underline{e})\frac{e^{ikr}}{r}}$$

mit der <u>Streuamplitude</u>

$$\boxed{f(\underline{e}) := -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, e^{-ik(\underline{e}\cdot\underline{r}')}V(\underline{r}')\psi^+(\underline{r}')}$$

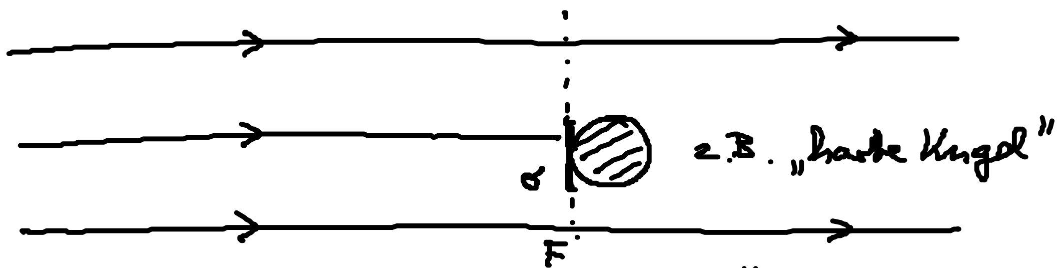
hängt ab von der Beobachtungsrichtung $\underline{e} = \frac{\underline{r}}{r}$:



Wirkungsquerschnitt

Streuung eines Teilchenstrahls an einem (undurchdringlichen) Streuzentrum:

$$\frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen/sec}}{\text{Zahl der einfallenden Teilchen/sec}} = \frac{\text{streuende Fläche } \sigma}{\text{Fläche } F\text{, auf die der Strahl trifft}}$$

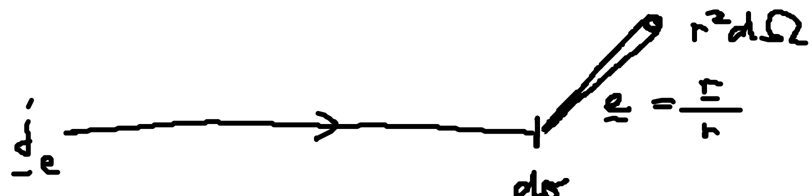


Verallgemeinerung für „weiche" Potenzialstreuung:

$$\underline{\text{Wirkungsquerschnitt } \sigma} := \frac{\text{Zahl der gestreuten Teilchen pro sec}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro sec}}$$
(Streu-)

differenzieller Wirkungsquerschnitt

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\text{Zahl der in Raumwinkel } d\Omega \text{ gestreuten T. pro sec}}{\text{Zahl der einf. T. pro cm}^2 \text{ pro sec}}$$



$$\boxed{d\sigma = \frac{(j_s)_r \, r^2 d\Omega}{|j_e|}}$$

Zur einlaufenden Welle

$$\psi_e(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$$

gehört die Stromdichte

$$\underline{j}_e = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi_e^* \underline{\nabla}\psi_e - \psi_e \underline{\nabla}\psi_e^*\right) = \frac{\hbar \underline{k}}{m}$$

zur Streuwelle in Richtung $\underline{e}$

$$\psi_s(\underline{r}) = f(\underline{e})\,\frac{e^{ikr}}{r}$$

gehört die Radial-Komponente der Stromdichte

$$(j_s)_r = \frac{\hbar}{2im}\left(\psi_s^* \frac{\partial}{\partial r}\psi_s - \psi_s \frac{\partial}{\partial r}\psi_s^*\right)$$

$$= \frac{\hbar}{2im}\,|f(\underline{e})|^2 \left\{ \frac{e^{-ikr}}{r}\left(\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{ikr} - \frac{e^{ikr}}{r}\left(-\frac{ik}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{-ikr} \right\}$$

$$= \frac{\hbar k}{m r^2}\,|f(\underline{e})|^2$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\underline{e})|^2}$$ diff. Wirkungsquerschnitt

$$\boxed{\sigma = \int d\Omega\,|f(\underline{e})|^2}$$ totaler Wirkungsquerschnitt

6.3 Born'sche Näherung

Störungstheoretische Näherung für große Einstrahlungsenergie $\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \gg V(\underline{r})$: $\hat{H}^1$ als kleine Störung.

1. Ordnung Störungsrechnung der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$\boxed{|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{G}_+ \hat{H}^1 |\phi\rangle}$$ 1. Born'sche Näherung

In Ortsdarstellung:

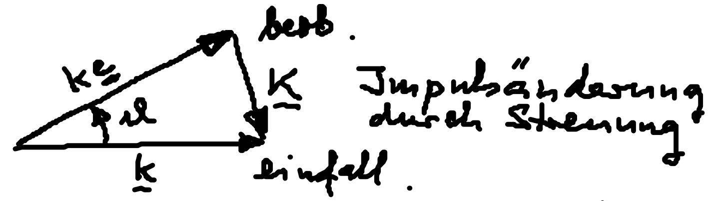
$$\psi^+(\underline{r}) \approx \psi_e(\underline{r}) + \frac{2m}{\hbar^2}\int d^3r'\, G_+(\underline{r}-\underline{r}')\,V(\underline{r}')\,\psi_e(\underline{r}')$$

mit $\psi_e(\underline{r}) = e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}}$

Streuamplitude in 1. Born'scher Näherung:

$$\boxed{f(\underline{e}) \approx -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\, V(\underline{r}')\, e^{i\underline{K}\cdot\underline{r}'}}$$

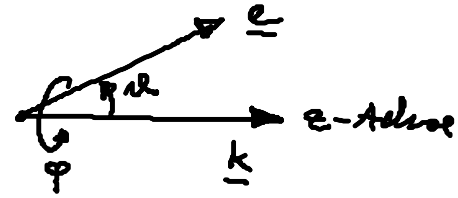
mit $\underline{K} := \underline{k} - k\underline{e}$



d.h. Streuamplitude $\sim$ Fouriertransformierte von $V(\underline{r})$

Kugelsymm. Pot. $V(r)$:

Parametrisierung von $\underline{e}$ durch (ϑ, φ)

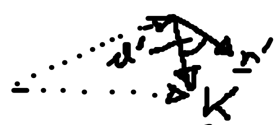


$$\Rightarrow K = |\underline{k} - k\underline{e}| = \sqrt{k^2 + k^2 - 2k^2\cos\vartheta}$$

$$= 2k\sin\frac{\vartheta}{2} \qquad \text{Streuvektor}$$

Integration d^3r' in Kugelkoordinaten $(r', \vartheta', \varphi')$ um $\underline{K}$-Achse

$$\underline{K}\,\underline{r}' = Kr'\cos\vartheta'$$



$$d^3r' = r'^2\, dr'\, d(\cos\vartheta')\, d\varphi'$$

$f(\underline{e})$ hängt aus Symmetriegründen nicht von φ ab:

$$f(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{4\pi}\int_0^\infty dr'\, r'^2\, V(r') \underbrace{\int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta')\, e^{iKr'\cos\vartheta'}}_{\frac{1}{iKr'}\left(e^{iKr'} - e^{-iKr'}\right) = 2\frac{\sin Kr'}{Kr'}} \int_0^{2\pi} d\varphi'$$

$$\boxed{f(\vartheta) = -\frac{2m}{\hbar^2}\frac{1}{K}\int_0^\infty dr'\, r'\, V(r')\sin(Kr')} \qquad K = 2k\sin\frac{\vartheta}{2}$$

diff. Wirkungsquerschnitt $\dfrac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\vartheta)|^2$

totaler Wirkungsquerschnitt $\sigma = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\, |f(\vartheta)|^2$

Rutherford-Streuung: Streuung eines Z_1-fach geladenen Teilchens an einem Z_2-fach geladenen $\Rightarrow V(r) = -\dfrac{Z_1 Z_2 e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$

$\Rightarrow$ Konvergenzschwierigkeiten, daher betrachte

Yukawa-Pot. $V(r) = \frac{a}{r} e^{-\varkappa r}$ mit $\varkappa \to 0$.

Für $\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Z_1 Z_2 e^2}{8\pi\varepsilon_0 m v^2}\right)^2 \frac{1}{\sin^4\frac{\vartheta}{2}}$ ergibt sich dann

die klass.-mechan. Formel! Dies ist sogar die <u>exakte</u> quantenmech. Lösung (nicht nur 1. Born'sche Näherung)

<u>NB</u>: $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ divergiert für $\vartheta \to 0$ wegen unendl. Reichweite von $V(r)$; σ divergiert ebenfalls.

<u>Systematische Störungsentwicklung</u>:

Iteration der Lippmann-Schwinger-Gl.

$$|\psi^{(+)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\psi^+\rangle \qquad \hat{R} := \hat{G}_+ \hat{H}'$$

ergibt

$$|\psi^{(1)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\phi\rangle$$
$$= (1 + \hat{R})|\phi\rangle \qquad \text{1. Born'sche Näherung}$$

$$|\psi^{(2)}\rangle = |\phi\rangle + \hat{R}|\psi^{(1)}\rangle$$
$$= (1 + \hat{R} + \hat{R}\hat{R})|\phi\rangle \qquad \text{2. Born'sche Näherung}$$

$$\vdots$$

$$|\psi\rangle = (1 + \hat{R} + \hat{R}^2 + \hat{R}^3 + \dots)|\phi\rangle$$

<u>Born'sche Reihe</u>

(konvergent für kleine V)