English Summary:

7. Relativistic quantum theory

7.1 Covariant notation of relativity

Principle of Relativity: $(ds)^2 := (c\,dt)^2 - (d\underline{r})^2$ invariant under Lorentz transformations between inertial systems

contravariant components $x^0 := ct$, x^α, $\alpha = 1,2,3$

covariant components $x_0 := ct$, $x_\alpha := -x^\alpha$

$$\boxed{(ds)^2 = dx^i dx_i}$$

$$\Box = -\partial_i \partial^i$$

4-momentum $p^i := m_0 c u^i = \begin{pmatrix} E/c \\ m(v) v^\alpha \end{pmatrix}$ $\quad m(v) = m_0 \gamma = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$, $\beta = \frac{v}{c}$

$$p^i p_i = m_0^2 c^2, \quad E = m(v) c^2$$

$$\boxed{E^2 = m_0^2 c^4 + c^2 \underline{p}^2}$$

Lorentz transform $x'^i = U^i{}_k x^k$, $\quad U^i{}_k = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$

7.2 Klein-Gordon-Gleichung

Die nichtrelativist. Schrödingergl. $i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$ folgt aus der nichtrelativist. Energie-Impuls-Beziehung

$$H = \frac{1}{2m}(\underline{p} - e\underline{A})^2 + V.$$

mit der Ersetzung

$$\underline{p} \rightarrow \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla} \quad \text{(Ortsdarstellung)}$$

Forderungen an eine relativist. Formulierung (Ortsdarstellung):

(1) Beschreibung des Zustandes durch Wellenfkt. $\psi(q,t)$, wobei q Bahn- und Spinvariable enthält und $|\psi(q,t)|^2$ Aufenthaltswahrsch.dichte

zur Zeit t.

(2) linear Dynamik $L\psi = 0$

(wegen Superpositions-Prinzip: mit ψ_1, ψ_2 auch $\alpha\psi_1 + \beta\psi_2$ Lös.)

Dgl. 1. Ordnung, damit Zeitentwicklung durch Anfangszustand $\psi(q,0)$ eindeutig bestimmt ist:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$$

(3) Physikal. Observable $\longrightarrow$ hermite'sche Operatoren

Messwerte $\longrightarrow$ Eigenwerte des Op.

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle$$

Mittelwert der Messung $\longrightarrow$ Erwartungswert $\langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$

(4) Es gibt vollständige Sätze vertauschbarer Op. $\hat{A}_i$ mit gemeinsamen Eigenzuständen $|a_1, a_2, \dots\rangle$:

$$\hat{A}_i |a_1, a_2, \dots\rangle = a_i |a_1, a_2, \dots\rangle$$

$$\langle a_1', a_2', \dots | a_1, a_2, \dots\rangle = \delta_{a_1' a_1} \delta_{a_2' a_2} \cdots \quad \text{orthonormiert}$$

$$\sum_{a_1 a_2 \dots} |a_1, a_2, \dots\rangle\langle a_1, a_2, \dots| = 1 \quad \text{vollständig}$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{a_1, a_2, \dots} c(a_1, a_2, \dots, t)\, |a_1, a_2, \dots\rangle \quad \text{Entwicklung}$$

Wahrscheinlichkeit, im Zustand $|\psi\rangle$ die Messwerte $a_1, a_2, \dots$ zu messen:

$$|c(a_1, a_2, \dots)|^2 = |\langle a_1, a_2, \dots|\psi(t)\rangle|^2$$

<u>Relativistische Energie-Impuls-Beziehung</u>:

$E = \sqrt{m_0^2 c^4 + c^2 p^2}$ würde mit $E \to i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$, $\underline{p} \to \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}$ auf

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \underbrace{\sqrt{m_0^2c^4 - \hbar^2c^2\Delta}}_{\text{nichtanalyt. Fkt. eines Op.} \lightning}\,\psi$$ führen: nicht akzeptabel!

<u>Ausweg</u>: $E^2 = m_0^2c^4 + c^2p^2$ liefert

$$\left(i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\right)^2\psi = \left(m_0^2c^4 - \hbar^2c^2\Delta\right)\psi$$

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi \equiv \Box\psi = \left(\frac{m_0c}{\hbar}\right)^2\psi}$$

<u>Klein-Gordon-Gl.</u>

Lorentz-invariant, falls ψ ein Lorentz-Skalar ist, da $\Box = -\partial^i\partial_i$ Lorentz-invariant ist (Skalarprodukt eines 4-Vektors)

<u>Einwände gegen die Klein-Gordon-Gl.:</u>

(i) Der <u>Spin</u> kann nicht berücksichtigt werden, denn ein Ansatz $\hat{H} \rightarrow \hat{H} - \underbrace{\hat{\underline{\mu}}\cdot\underline{B}}_{\text{kein Skalarprodukt von 4-Vektoren}}$ wäre nicht Lorentz-invariant!

(ii) Dgl. <u>2. Ordnung</u> in t $\Rightarrow$ Anfangsbed. $\psi(\underline{r},0)$ <u>und</u> $\frac{\partial\psi}{\partial t}(\underline{r},0)$ notwendig

(iii) <u>Kontinuitätsgl.</u> (Wahrscheinlichkeitserhaltung):

Lorentz-invariante Form $\boxed{\partial_i J^i = 0}$, J^i 4-Stromdichte

mit $\partial_0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}$, $\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$ folgt

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}J^0 + \underbrace{\sum_{\alpha=1}^{3}\partial_\alpha J^\alpha}_{\operatorname{div}\underline{J}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{J^0}{c} \text{ hat Bedeutung einer } \underline{\text{räumlichen Wahrscheinl.dichte}}$$

Aus der Klein-Gordon-Gl.

$$\partial^i \partial_i \psi = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi \qquad | \psi^*$$

folgt durch c.c.

$$\partial^i \partial_i \psi^* = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi^* \qquad | \cdot \psi$$

subtr.

$$\Rightarrow \psi^* \partial^i \partial_i \psi - \psi \partial^i \partial_i \psi^* = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \underbrace{(\psi^* \psi - \psi \psi^*)}_{0} = 0$$

$$\Rightarrow \partial_i \underbrace{(\psi^* \partial^i \psi - \psi \partial^i \psi^*)}_{=: J^i} = 0$$

4-Stromdichte

$\Rightarrow J^0 = \psi^* \partial^0 \psi - \psi \partial^0 \psi^* = \frac{1}{c}(\psi^* \dot{\psi} - \psi \dot{\psi}^*)$ kann nicht als räumliche Wahrscheinl.dichte interpretiert werden, da J^0 negativ werden kann (stattdessen: Ladungsdichte).

Lösung der Klein-Gordon-Gl. für freie Teilchen:

$\psi = \psi_0 \exp i\{\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t\}$ ebene Welle

$$\underline{k} \cdot \underline{r} - \omega t = -\left(\frac{\omega}{c} ct - \underline{k} \cdot \underline{r}\right) = -k^j x_j \overset{*}{=} -k_j x^j$$

mit $k^0 = \frac{\omega}{c} = k_0$

$k^\alpha = -k_\alpha$

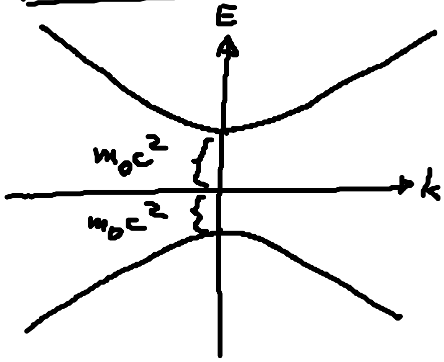
$\psi = \psi_0 \exp\{-i k^j x_j\}$ eingesetzt in $-\partial^i \partial_i \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi$:

$$-\partial^i \partial_i \psi = i k^j \partial^i \psi_0 \exp\{-i k_j x^j\} = k^j k_j \psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 \psi$$

$$\Rightarrow k^j k_j = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \underline{k}^2 \overset{*}{=} \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2$$

$$\omega^2 = c^2 \left[\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2 + \underline{k}^2\right]$$

$$\boxed{E = \hbar\omega = \pm c\sqrt{m_0^2c^2 + (\hbar \underline{k})^2}}$$



Nichtrelativist. Grenzfall:

$$E = \pm m_0c^2\sqrt{1 + \left(\frac{\hbar \underline{k}}{m_0 c}\right)^2}$$

$$\approx \pm m_0c^2\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar \underline{k}}{m_0 c}\right)^2\right]$$

$$= \pm\left[m_0c^2 + \frac{(\hbar \underline{k})^2}{2m_0}\right]$$

(für $\hbar k \ll m_0 c$)

$\underline{E>0}$: Teilchen mit Ruheenergie m_0c^2.

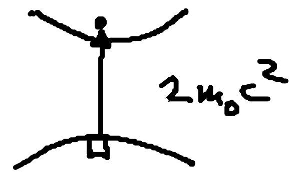
$\underline{E<0}$: Teilchen mit Ruheenergie $-m_0c^2$ $\Rightarrow$ <u>neg.</u> Masse

Interpretation (Dirac): alle Zustände mit $E<0$ sind im Grundzustand besetzt.

Einstrahlung von Energie $> 2m_0c^2$:

Teilchen - <u>Antiteilchen</u> - Erzeugung

(= fehlendes Teilchen mit $m<0, q$
$\hat{=}$ Antiteilchen mit $m>0, -q$)



„Loch" im Dirac-See

7.3 Dirac-Gleichung für Elektronen

Die zeitliche Entwicklung soll <u>eindeutig</u> durch Anfangszustand $\psi(\underline{r},0)$ festgelegt sein

$\Longrightarrow$ Dgl. <u>1. Ordnung</u> in der Zeit t: $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$

<u>Lorentz-Kovarianz</u> (Invarianz): Dgl. muss auch 1. Ordn. in $\frac{\partial}{\partial x}$ sein (Symm. Raum-Zeit)

$$H = c\underline{\alpha}\cdot\underline{p} + m_0c^2\beta \longrightarrow \frac{\hbar}{i}c\,\underline{\alpha}\cdot\underline{\nabla} + m_0c^2\beta$$

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\,\underline{\alpha}\cdot\underline{\nabla}\psi + m_0c^2\beta\psi}$$ <u>Dirac-Gl.</u>

$$\underline{\alpha}\cdot\underline{\nabla} = \alpha^1\partial_1 + \alpha^2\partial_2 + \alpha^3\partial_3 = \sum_{\mu=1}^{3}\alpha^\mu\partial_\mu$$

Konsequenzen

(i) Wegen Isotropie des Raumes können $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ keine Zahlen sein (sonst ist H nicht rotationsinvar.)

$\Rightarrow \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$ sind Matrizen (Operatoren!)

$\Rightarrow \beta$ ebenfalls Matrix

(ii) Wegen Lorentz-Kovarianz können $\underline{\alpha}, \beta$ nicht auf Bahnvariable $\underline{r}$ wirken $\Rightarrow$ Spin-Operatoren

(zusätzl. Freiheitsgrade)

$$\psi \in \mathcal{H} = \underset{\text{Bahn}}{\mathcal{H}_B} \times \underset{\text{Spin}}{\mathcal{H}_S}$$

Darstellung der Spin-Freiheitsgrade durch n-dim. Spaltenvektor (Spinor) $\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \vdots \\ \psi_n \end{pmatrix}$

$\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3, \beta$: $n \times n$ Matrizen

Es gilt $\underline{\alpha} \cdot \underline{p} = \underline{p} \cdot \underline{\alpha}$ (kommutieren)

(iii) $\hat{H}, \hat{p}$ hermitesch

$$\Rightarrow \hat{H}^+ = c\underline{\hat{p}}^+ \cdot \underline{\alpha}^+ + m_0 c^2 \beta^+ = c\,\underline{\hat{p}} \cdot \underline{\alpha}^+ + m_0 c^2 \beta^+ \overset{!}{=} \hat{H}$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \underline{\alpha}^+ &= \underline{\alpha} \\ \beta^+ &= \beta \end{aligned}\right\} \text{hermitesch}$$

(iv) Iteration der beiden Seiten der Dirac-Gl. $\to$ Klein-Gordon

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\psi = (c\,\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta)\psi \quad \text{Dirac-Gl.}$$

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi = (c\,\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta)(c\,\underline{\alpha} \cdot \underline{p} + m_0 c^2 \beta)\psi$$

$$= \left[c^2 (\underline{\alpha} \cdot \underline{p})(\underline{\alpha} \cdot \underline{p}) + m_0 c^3 (\underline{\alpha} \cdot \underline{p}\beta + \beta\,\underline{\alpha} \cdot \underline{p}) + m_0^2 c^4 \beta^2\right]\psi$$

$$= \left[c^2 \sum_{\mu,\nu=1}^{3} (\alpha^\mu \alpha^\nu p^\mu p^\nu) + m_0 c^3 \sum_{\mu=1}^{3} (\alpha^\mu \beta + \beta \alpha^\mu) p^\mu + m_0^2 c^4 \beta^2\right]\psi$$

$$\overset{!}{=} \left[c^2 p^2 + m_0^2 c^4\right]\psi \quad \text{Klein-Gordon-Gl.}$$

$$\Longrightarrow \sum_{\mu,\nu=1}^{3} \alpha^\mu \alpha^\nu p^\mu p^\nu = (p)^2 \quad \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} (\alpha^\mu)^2 &= 1 \\ \alpha^\mu \alpha^\nu + \alpha^\nu \alpha^\mu &= 0 \end{aligned}} \quad (\mu \neq \nu)$$

$$\boxed{\begin{aligned} \alpha^\mu \beta + \beta \alpha^\mu &= 0 \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}}$$

α^μ, β <u>antikommutieren</u> !