English Summary:

7.2 Klein-Gordon eq.

$$\boxed{\left(\Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\psi = \left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\psi} \Leftrightarrow \partial_i\partial^i\psi = -\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\psi$$

$E = \hbar\omega = \pm c\sqrt{m_0^2c^2 + (\hbar\underline{k})^2}$ free particles/antiparticles

7.3 Dirac eq

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -i\hbar c\,\underline{\alpha}\cdot\underline{\nabla}\psi + m_0c^2\beta\psi}$$

$\alpha^\mu\beta + \beta\alpha^\mu = 0 \qquad \beta^2 = 1$

$\alpha^\mu\alpha^\nu + \alpha^\nu\alpha^\mu = 0 \qquad (\alpha^\mu)^2 = 1$

Matrizendarstellungen von α^μ, β (als $n\times n$ Matrizen)

$\boxed{v^\mu = c\alpha^\mu} \Longrightarrow$ „Zitterbewegung des Elektrons"

Eigenwerte von α^μ, β sind ± 1

$$\left(\text{denn: } \alpha^\mu v = \underset{\in\mathbb{R}}{\lambda} v \Rightarrow \underbrace{(\alpha^\mu)^2}_{1} v = \lambda^2 v \Rightarrow \lambda = \pm 1\right)$$

$$Sp(\alpha^\mu) = Sp\,\beta = 0$$

$$\left(\text{denn: } Sp(\alpha^\mu) = Sp(\beta^2\alpha^\mu) \underset{\text{zykl. Vertausch.}}{=} Sp(\beta\underbrace{\alpha^\mu\beta}_{-\beta\alpha^\mu}) = -Sp(\beta^2\alpha^\mu) = -Sp(\alpha^\mu)\right)$$

Andererseits:

$$Sp(\alpha^\mu) = \sum_{i=1}^{n}\underbrace{\lambda_i}_{\pm 1} \overset{!}{=} 0 \quad \Longrightarrow \quad n \text{ gerade}$$

$\underline{n=2}$: nicht möglich, da es nur 3 (statt 4) kommut. antikommutierende, spurlose 2x2 Matrizen gibt:

$$\sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

(Pauli'sche Spin-Matrizen)

$\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3, 1$ sind Basis im $\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2$

$\underline{n=4}$: Minimal erforderliche Größe der Darstellung

Mögliche spezielle Wahl (Blockmatrix-Darstellung):

$$\left.\begin{aligned} \alpha^\mu &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \\ \beta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \text{ 4x4 Matrizen}$$

$$\Rightarrow \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \sum_{s=1}^{4} \psi_s(r,t)\, e_s \quad \text{mit } e_s := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \text{s-te Stelle}$$

<u>Bem.</u>: In der nichtrelativist. Quantentheorie genügt 2-komponentiger Spinor.
Lorentz-Kovarianz erzwingt 4-komp. Spinor
$\longrightarrow$ weitere Freiheitsgrade (Teilchen/Antiteilchen)

<u>Kontinuitätsgleichung</u>

$$i\hbar\dot\psi = -i\hbar c\alpha^\mu\partial_\mu\psi + m_0c^2\beta\psi \qquad |\cdot\psi^+ \text{ linksmult. (Vektor!)}$$

adjungiert:

$$-i\hbar\dot\psi^+ = i\hbar c\underbrace{(\alpha^\mu\partial_\mu\psi)^+}_{(\partial_\mu\psi^+)\alpha^\mu} + m_0c^2\underbrace{(\beta\psi)^+}_{\psi^+\beta} \qquad |\cdot\psi \text{ Rechtsmult.}$$

Subtr.

$$\Rightarrow i\hbar\underbrace{(\psi^+\dot\psi + \dot\psi^+\psi)}_{\frac{\partial}{\partial t}(\psi^+\psi)} = -i\hbar c\underbrace{\left(\psi^+\alpha^\mu(\partial_\mu\psi) + (\partial_\mu\psi^+)\alpha^\mu\psi\right)}_{\partial_\mu(\psi^+\alpha^\mu\psi)}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t}\underbrace{(\psi^+\psi)}_{\varrho} + c\,\partial_\mu\underbrace{(\psi^+\alpha^\mu\psi)}_{\frac{j^\mu}{c}} = 0$$

Kontinuitätsgl. mit <u>Wahrscheinlichkeitsdichte</u> $\varrho = \sum_{s=1}^{4}\psi_s^*\psi_s \geq 0$

<u>pos. definit</u>!

und <u>W.stromdichte</u> $j^\mu = c\,\psi^+\alpha^\mu\psi \quad (\mu = 1,2,3)$

4-Schreibweise $\boxed{\partial_k j^k = 0}$

mit $j^0 = c\psi^+\psi = c\sum_{s=1}^{4}\psi_s^*\psi_s = c\varrho$

$j^\mu = c\psi^+\alpha^\mu\psi = c\sum_{ss'}\psi_s^*\alpha^\mu_{ss'}\psi_{s'}$

7.4 Der nichtrelativistische Grenzfall

a) Lösung der Dirac-Gl. im Ruhsystem

$$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = m_0c^2\beta\psi}$$ nur Ruhenergie

$$H = m_0c^2\beta = m_0c^2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\\ \psi_4\end{pmatrix}, \quad \beta\psi = \begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ -\psi_3\\ -\psi_4\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow i\hbar\dot\psi_{1,2} = m_0c^2\psi_{1,2}$: $\psi_{1,2} \sim e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$

$i\hbar\dot\psi_{3,4} = -m_0c^2\psi_{3,4}$: $\psi_{3,4} \sim e^{+\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}$

		Spin	Ruhenergie
4 lin. unabh. Lös.	$\psi^{(1)} = e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}e_1$	$\uparrow$	>0
	$\psi^{(2)} = e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}e_2$	$\downarrow$	>0
	$\psi^{(3)} = e^{\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}e_3$	$\uparrow$	<0
	$\psi^{(4)} = e^{\frac{i}{\hbar}m_0c^2t}e_4$	$\downarrow$	<0

b) Ankopplung an elektromagn. Feld

Potenziale $\underline{A}$, ϕ, e Ladung

klassisch $\underline{p} \to \underline{p} - e\underline{A}$

$H \to H + e\phi$

Dirac-Gl.: $$\boxed{i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left(c\underline{\alpha}\cdot(\underline{p} - e\underline{A}) + m_0c^2\beta + e\phi\right)\psi}$$

$\underline{p} \to \frac{\hbar}{i}\underline{\nabla}$ kanon. Impuls

$\underline{\pi} = \underline{p}_{kin} := \underline{p} - e\underline{A}$ kinet. Impuls

<u>Lösungsansatz</u>: $\psi = \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix}$ $\}$ 2 Komp.: „Teilchen" $E \geq 0$; $\}$ 2 Komp.: „Antiteilchen" $E \leq 0$

$$\underline{\alpha}\,\underline{\pi}\,\psi = \sum_{\mu=1}^{3} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \sigma^\mu & 0 \end{pmatrix} \pi^\mu \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \sum_{\mu=1}^{3} \begin{pmatrix} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_b \\ \sigma^\mu \pi^\mu \psi_a \end{pmatrix}$$

$$\beta\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_a \\ -\psi_b \end{pmatrix}$$

<u>Dirac-Gl. zerfällt in 2 gekoppelte, je 2-komp. Gln.</u>:

$$\boxed{\begin{aligned} i\hbar\dot{\psi}_a &= c\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_b + (m_0c^2 + e\phi)\psi_a \\ i\hbar\dot{\psi}_b &= c\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \psi_a + (-m_0c^2 + e\phi)\psi_b \end{aligned}}$$

Ansatz
$$\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = \underbrace{e^{-\frac{i}{\hbar}m_0c^2 t}}_{\text{schnelle Osz}} \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix}}_{\text{langsam } t\text{-abhängig}} \quad \text{für } \underline{E \geq 0}$$

$$i\hbar\dot{\varphi}_a = c\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_b + e\phi\varphi_a \qquad (1)$$

$$i\hbar\dot{\varphi}_b = c\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a - 2m_0c^2\varphi_b + e\phi\varphi_b \qquad (2)$$

<u>Nichtrelativist. Näherung</u>: $E - m_0c^2 \ll m_0c^2 \Rightarrow \dot{\varphi}_b \approx 0$

$e\phi \ll m_0c^2 \Rightarrow e\phi\varphi_b \approx 0$

$$\overset{(2)}{\Rightarrow} c\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a - 2m_0c^2\varphi_b \approx 0$$

$$\varphi_b \approx \frac{1}{2m_0c}\sum_{\mu=1}^{3} \sigma^\mu \pi^\mu \varphi_a = \frac{1}{2m_0c}(\underline{\sigma}\cdot\underline{\pi})\varphi_a$$

eingesetzt in (1):

$$i\hbar\dot{\varphi}_a = \Big[\frac{1}{2m_0}\underbrace{(\underline{\sigma}\cdot\underline{\Pi})(\underline{\sigma}\cdot\underline{\Pi})}_{\underline{\Pi}^2 + i\underline{\sigma}(\underline{\Pi}\times\underline{\Pi})} + e\phi\Big]\varphi_a$$

$$(\underline{\Pi}\times\underline{\Pi})\varphi_a = (\underline{p} - e\underline{A})\times(\underline{p} - e\underline{A})\varphi_a$$

$$= \underbrace{\underline{p}\times(\underline{p}\varphi_a)}_{0} - e\underbrace{[\underline{p}\times(\underline{A}\varphi_a) + \underline{A}\times\underline{p}\varphi_a]}_{\frac{\hbar}{i}\underline{B}\varphi_a} + e^2\underbrace{(\underline{A}\times\underline{A})}_{0}\varphi_a$$

$$\Rightarrow (\underline{\sigma}\cdot\underline{\Pi})(\underline{\sigma}\cdot\underline{\Pi}) = (\underline{p} - e\underline{A})^2 - e\hbar\,\underline{\sigma}\cdot\underline{B}$$

$$\boxed{i\hbar\dot{\varphi}_a = \Big[\frac{1}{2m_0}(\underline{p} - e\underline{A})^2 - \frac{e\hbar}{2m_0}\underline{\sigma}\cdot\underline{B} + e\phi\Big]\varphi_a}$$

nichtrelativist. <u>Pauli-Gl.</u> für Spin $\pm\frac{\hbar}{2}$

mit dem <u>richtigen</u> <u>gyromagn.</u> Verhältnis $g=2$:

$$\frac{e\hbar}{2m_0}\underline{\sigma} = \frac{e}{m_0}\frac{\hbar}{2}\underline{\sigma} = g\,\frac{e}{2m_0}\underline{S}$$

<u>Interpretation</u> des 4-komp. Spinors:

Teilchen-Freiheitsgrad $\psi_a = \begin{pmatrix}\psi_{a\uparrow}(\underline{r},t)\\ \psi_{a\downarrow}(\underline{r},t)\end{pmatrix}$

Antiteilchen-Freiheitsgrad $\psi_b = \begin{pmatrix}\psi_{b\uparrow}(\underline{r},t)\\ \psi_{b\downarrow}(\underline{r},t)\end{pmatrix}$

Spin-Eigenwertproblem in 2x2-Matrixdarstellung:

$$\sigma_3\begin{pmatrix}\psi_{a\uparrow}\\ \psi_{a\downarrow}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_{a\uparrow}\\ \psi_{a\downarrow}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\psi_{a\uparrow}\\ -\psi_{a\downarrow}\end{pmatrix}$$

Spin-Op. in 4x4-Block-Matrixdarstellung:

$$\underset{\sim}{\underline{\sigma}} = \begin{pmatrix}\underline{\sigma} & 0\\ 0 & \underline{\sigma}\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \underset{\sim}{\underline{\sigma}}\psi = \begin{pmatrix}\underline{\sigma} & 0\\ 0 & \underline{\sigma}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_a\\ \psi_b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{\sigma}\psi_a\\ \underline{\sigma}\psi_b\end{pmatrix}$$

Ableitung der <u>Spin-Bahn-Kopplung</u> für $\underline{A}=0$ und rot. symm. $V(r)$:

Bahn-Drehimpuls

$$\underline{L} = \underbrace{\underline{r}\times\underline{p}}_{\text{Bahn-Raum}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{Spinor-Raum}}$$

Gesamt-Drehimpuls:

$\underline{J} := \underline{L} + \frac{\hbar}{2}\underline{\sigma}$ ist Erhaltungsgröße:

$$[\underline{J}, H] = \underbrace{[\underline{L}, H]}_{i\hbar c\,\underline{\alpha}\times\underline{p}} + \frac{\hbar}{2}\underbrace{[\underline{\sigma}, H]}_{-2ic\,\underline{\alpha}\times\underline{p}} \overset{!}{=} 0 \qquad (\text{Ü!})$$

L^{r} ist keine Bewegungskonstante!

Entwicklung der Dirac-Gl. für $E \geq 0$ bis 1. Ordnung in $\frac{\epsilon - V}{2m_0c^2}$, $\epsilon := E - m_0c^2$, liefert mit $\begin{pmatrix} \psi_a \\ \psi_b \end{pmatrix} = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}\begin{pmatrix} \varphi_a \\ \varphi_b \end{pmatrix}$:

$$E\varphi_a = \Big(\frac{p^2}{2m_0} + V(r) - \frac{p^4}{8m_0^3c^2} + \frac{\hbar^2}{4m_0^2c^2}\frac{dV}{dr}\frac{1\,\partial}{r\,\partial r}$$

$$+ \underbrace{\frac{\hbar}{4m_0^2c^2}\frac{dV}{dr}\frac{1}{r}\underline{\sigma}\cdot\underline{L}}_{\text{Spin-Bahn-Kopplung}}\Big)\varphi_a$$