

Anknüpfung an die letzte VL:

Argumentationsstruktur:

Master-gl: Evolutionsgleichung
linear Wahrscheinlichkeits-
dichte $P(x, t)$ auf Basis
von Übergangswahrscheinlich-
keiten W von x nach x'
und umgekehrt

Annahme: W sei nur signifikant
von 0 verschieden, wenn
 x nahe x'

o Kramers-Moyal Entwicklung
für kleine Schrittweiten

$$\Delta = x - x'$$

$$\Rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n H^{(n)}(x, t) P(x, t) \right]$$

mit $K^{(n)}$
 $K(x, t)$: Kovarianz-Koeffizient
n-ter Ordnung

Nehme an, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten w so schnell mit t abfallen, dass

$$K^{(n)} \approx 0, \quad n \geq 3$$

Sodass wir die Reihe nach dem nach dem zweiten Koeff. abbrechen können.

(diese sind exakt gleich 0 für gauss-verteilttes Rauschen)

Man erhält die Fokker-Planck-Gl.

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} K^{(1)}(x, t) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K^{(2)}(x, t) \right] P(x, t)$$

(für eine dynamische Variable)

analog für mehrere dyn. Variablen

$$x_i, i = 1, \dots, m$$

$$\frac{\partial}{\partial z} p(x, z) = \left[- \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial x_i} H^{(1)}(x, z) + \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} H^{(2)}(x, z) \right] p(x, z) =: \hat{L}_{FP}$$

Man kann obiges in Form einer Kontinuitätsgleichung schreiben, in dem man einen Strom \mathcal{J} einführt und obiges darstellt als

$$\frac{\partial}{\partial z} p + \underbrace{\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathcal{J}_i}_{= \mathcal{D} \cdot \mathcal{J}} = 0$$

Dies drückt die Erhaltung der Gesamtwahrscheinlichkeit

$$\int dx p(x, z) = 1 \quad \forall z$$

Von der Langevin-Gl zur Fokker-Planck-Gl

Langevin:

nicht-überdämpft:

$$\dot{r} = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m} f(r)$$

überdämpften Fall:

$$0 = -\gamma v + \frac{1}{m} f(r)$$

$$\Leftrightarrow \gamma v = \frac{1}{m} f(r)$$

Kommentar zu möglichen verschiedenen
aber äquivalenten Notationen

Manchmal

$$\dot{v} = -\frac{\gamma}{m} v + \frac{1}{m} f \quad (\text{Newton})$$

Manchmal wird auch dies
mit γ bezeichnet.

(Nennen wir es hier mal $\tilde{\gamma}$)

$$\Rightarrow \dot{v} = -\tilde{f} v + \frac{1}{m} f$$



Rauschen der Kraft

Manchmal schreibt man das $\frac{1}{m}$ in das f rein

$$\Rightarrow \dot{v} = -\tilde{f} v + \tilde{f}$$

Je nach Verwendung von f oder \tilde{f} ändert sich die Bedeutung von Γ bzw. $\tilde{\Gamma}$ um einen Faktor $\frac{1}{m^2}$

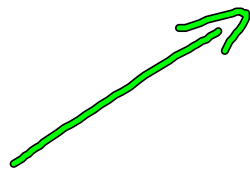
verallgemeinerte Langevin-Gl.:

$$\dot{x}_i(t) = h_i(\{x(t)\}, t)$$

$$+ \sum_{j=1}^n D_{ij}(\{x\}, t) f_j(t)$$

deterministisch
(Drift-Term)

prop. Rauschen
(Diffusionsterm)



und $\pm(t)$: Vektor, der alle dynamischen Variablen enthält.

gls

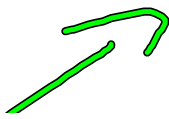
Bewegungsgleichung für die zugehörige Wahrscheinlichkeitsdichte $P(\{\pm\}, t)$

Man kann zeigen, dass sich die Kramers-Moyal-Koeffizienten auch darstellen kann als:

$$K_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(\{\pm\}, t)$$

$$= \frac{1}{n!} \lim_{\tau \rightarrow 0}$$

$$\left\langle \begin{aligned} & (x_{i_1}(t+\tau) - x_{i_1}(t)) \cdot \\ & (x_{i_2}(t+\tau) - x_{i_2}(t)) \cdot \\ & \vdots \\ & (x_{i_n}(t+\tau) - x_{i_n}(t)) \end{aligned} \right\rangle$$



berechenbar aus
Langevin-Gl.

formale Integration liefert:

$$x_i(t+\tau) - x_i(t) = \int_t^{t+\tau} dz' h_i(\{z\}, z') + \sum_j D_{ij}(\{z\}, z') f_j(z')$$

Stochastische
Integration

Ergebnis (nach Stratonovich-Regel)

$$K_i^{(1)} = h_i(\{z\}, t)$$

$$+ \frac{\tau}{2} \sum_{jk} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} D_{kj}$$

rausch-induzierter Drift

hier ungleich 0 für multiplikatives
Rauschen (d.h. $\frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \neq 0$)

Beispiel

nicht überdämpfte Langevin-Gl.
für 1 Brownsches Teilchen

$$\dot{x}^0 = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m} f$$

Identifikation

$$h_x = v$$

$$h_v = -\gamma v$$

} →

$$K_x^{(1)} = v$$

$$K_v^{(1)} = -\gamma v$$

Ergebnis: Zweiter Kravars-
Moyal-
Koeff.

$$K_{ij}^{(2)}(\{x\}, z) = \frac{1}{2} \sum_{\kappa} D_{i\kappa} D_{\kappa j}$$

im Beispiel:

$$D_{xx} = 0, \quad D_{xv} = 0, \quad D_{vx} = 0$$

$$D_{vv} = \frac{1}{m}$$

Zurück zur Fokker-Planck-Gleichung

Fokus: 1 Teilchen in 1D

überdämpfte Bewegung, kein externes Potential

$$0 = -\gamma v + \frac{1}{m} p$$

$$\Rightarrow \gamma \dot{x} = \frac{1}{m} p$$

$$\Rightarrow \dot{x}^0 = \frac{1}{\gamma m} p$$

(also wieder nur additives Rauschen)

Identifikation:

$$h_x = 0 \Rightarrow K_x^{(1)} = 0$$

$$D_{xx} = \frac{1}{m\gamma} \Rightarrow K_{xx}^{(2)} = \frac{1}{2} \frac{1}{m^2 \gamma^2}$$

Einsetzen in den Ausdruck für die Fokker-Planck-Gl

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \hat{L}_{FP} p$$

$$\text{mit } \hat{L}_{FP} = -\frac{\partial}{\partial x} K_x^{(1)} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} K_{xx}^{(2)}$$

Also

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) = D \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, t) \right] = 0$$

bekannte und
erwartete Diffusions-gl.
(für überdämpftes Teilchen
ohne externe Kräfte)

Anderes Beispiel

nicht-überdämpftes Teilchen in
einem externen Potential.

$$\dot{x} = v$$

$$\dot{v} = -\gamma v + \frac{1}{m} F + \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right)$$

dynamische Variablen: x, v

o Kramers - model:

$$h_x = v$$

$$h_v = -\gamma v + \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial}{\partial x} u(x) \right)$$

$$D_{xx} = 0$$

$$D_{vv} = \frac{1}{m}$$

$$\Rightarrow K_x^{(1)} = v, \quad K_v^{(1)} = -\gamma v + \frac{1}{m} \left(-\frac{\partial}{\partial x} u(t) \right)$$

$$K_{xx}^{(2)} = 0, \quad K_{vv}^{(2)} = \frac{\rho}{2} \frac{\gamma}{m^2}, \quad K_{xv}^{(2)} = K_{vx}^{(2)} = 0$$

\Rightarrow zugehörige Fokker-Planck-Gl.
(KM-Koeff. einsetzen)

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, v, t) = \left[-\frac{\partial}{\partial x} v - \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{m} \left(-\frac{\partial}{\partial x} u(t) \right) - \gamma v \right) + \frac{\rho}{2} \frac{\gamma}{m^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \right] P(x, v, t)$$

Stationäre Lösung der Fokker-Planck-Gleichung

betrachte System mit linear
dyn. Variable x

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t) + \frac{\partial}{\partial x} \eta(x, t) = 0$$

mit

$$\eta(x, t) = \left(K^{(1)}(x) - \frac{\partial}{\partial x} K^{(2)}(x) \right) P(x, t)$$



erfrachte nun das System
im therm. Gleichgewicht.

$$\Leftrightarrow \eta = 0$$

(schwächer $\frac{\partial \Omega}{\partial x} = 0$: stationärer Fall)

aus $\textcircled{1}$

$$K^{(1)}(x) p^{eq}(x) = \frac{\partial}{\partial x} (K^{(2)} p^{eq}(x))$$

erweitern liefert

$$\frac{K^{(1)}(x)}{K^{(2)}} K^{(2)} p^{eq} = \frac{\partial}{\partial x} (K^{(2)} p^{eq})$$
$$\int_c^x dx' \frac{K^{(1)}(x')}{K^{(2)}(x')}$$

$$\Rightarrow K^{(2)} p^{eq} = \alpha e$$

$$p^{eq}(x) = \frac{\alpha}{K^{(2)}} e^{-\int_c^x dx' \frac{K^{(1)}(x')}{K^{(2)}(x')}} - \phi(x)$$

=
erfüllt
auf
Form

$$\text{mit } \phi(x) = \ln K^{(2)}(x) - \int_c^x dx' \frac{K^{(1)}(x')}{K^{(2)}(x')}$$

Beispiel

1 nicht-überdämpftes Teilchen,
kein äußeres Feld

o dynamische Variable: v

Langevin-Gl: $\dot{v} = -\gamma v + f$

$$\Rightarrow h_v = -\gamma v \rightarrow K^{(1)} = -\gamma v$$
$$D_{vv} = 1 \rightarrow K^{(2)} = \frac{\gamma}{2}$$

$$\Rightarrow \phi(v) = \underbrace{\ln \frac{\gamma}{2}}_{= \text{const}} - \int_0^v dv' \frac{-\gamma v'}{\frac{\gamma}{2}}$$

setze
Fluktuations-
Dissipations-
relationen

$$\begin{aligned} &= 2 \cdot \frac{\gamma}{\gamma} v^2 \\ &= \frac{1}{2} \cdot m v^2 \cdot \beta \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{p^{eq}(v) \sim e^{-\beta \frac{1}{2} m v^2}}$$

Maxwell-Boltzmann-
Verteilung