

3. Elektrostatik

- behandelt elektr. Felder in Materie oder langsam bewegte elektr. Ladungen

3.1 Bemerkungen zur elektrischen Ladung

- Erfahrung:

Es gibt zwei Arten von Ladungen, positive und negative

- Ladung ist diskret.

→ Elementarladung: $e_0 = 1,60218 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Proton p : $+e_0$, Radius $a(p) \approx 10^{-15} \text{ m}$

Elektron e : $-e_0$, " $a(e) < 10^{-15} \text{ m}$

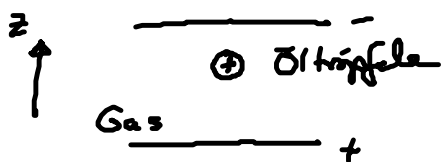
Quarks: $\pm \frac{2}{3}e_0 / \pm \frac{1}{3}e_0$, aber nicht frei, sondern nur in Kombination zu $0, \pm e_0$

- Einheit der Ladung:

$$1 \text{ C} = 1 \text{ As} \quad (3.1)$$

... Ladung, die in 1 Sekunde bei einem Strom von 1 Ampere durch Leiter fließt!

- Messung der Elementarladung: Millikan-Versuch



$$m\ddot{z} = qE - 6\pi\eta a \dot{z} - gm \quad (3.2)$$

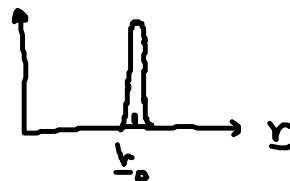
- Ladungsdichte:

(1) Proton, Elektron etc ... Ladung q auf kleinstem Raum = Punktladung mit Dichte $q \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$

NB: Delta-Funktion $\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)$

$$\text{mit } \int \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0) d^3r = 1$$

$$\rightarrow [\delta] = \frac{1}{\text{m}^3}$$



(2) viele Punktladungen q_i :
 Dichte $\left[\rho(\underline{r}) = \sum_i q_i \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \right]$ (3.3) Ort der Pkt. Ladg q_i

(3) Punktladungen mit kleinsten Abständen
 → kontinuierliche Ladungsdichte: $\rho(\underline{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta V}$ (3.4)

Ladung in Vol. V : $Q = \int_V \rho(\underline{r}) d^3r$ (3.5)

• Ladungserhaltung:

In einem abgeschlossenen System bleibt die Summe aller Ladungen konstant

3.2 Coulombsches Gesetz & elektr. Feld

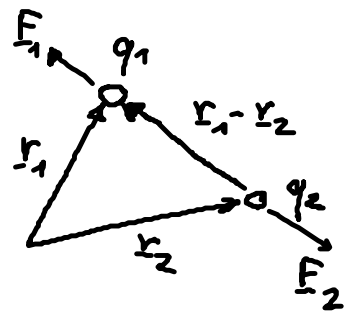
• Erfahrung: (i) abstoßende } Kraft zwischen { gleichnamige
 anziehende } " " " Ladungen

(ii) Kraft = Vektor im Sinne der Newtonschen Mechanik → Superpositionsprinzip

• Coulombsches Gesetz:

Kraft, die Ladung q_2 am Ort \underline{r}_2 auf eine Ladung q_1 am Ort \underline{r}_1 ausübt:

$$\underline{F}_1 = k q_1 q_2 \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} = -\underline{F}_2 \quad (3.6)$$



NB: (1) $\underline{F} \sim \frac{1}{r^2}$, wie Gravitationskraft
 aber abstoßend/anziehend wegen $\underline{F} \sim q_1 q_2$

(2) SI-System: wird hier angewendet!

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ladungseinheit [C]} \\ \text{Kraft " [N]} \end{array} \right\} k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (3.7)$$

mit $\epsilon_0 \approx 8,854 \cdot 10^{-12} \frac{F}{m}$

... Dielektrizitätskonstante des Vakuums

$$[1 \text{ Farad} = 1 F = 1 \frac{C}{V} = 1 \frac{As}{V} = 1 \frac{A^2 s^2}{m^2}]$$

(3) Test des Gesetzes:

$$F \sim \frac{1}{r^{2+\epsilon}}, \quad \epsilon < 3 \cdot 10^{-16}$$

$$F \sim \frac{e^{-r/\lambda}}{r^2}, \quad \lambda > 10^8 \text{ m} \longleftrightarrow \text{Photonmasse: } m_p < 10^{-50} \text{ kg}$$

• Kraft auf Testladung q_0 am Ort \underline{r}_0 von Ladungen q_i :

$$\underline{F} = \frac{q_0}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\underline{r}_0 - \underline{r}_i}{|\underline{r}_0 - \underline{r}_i|^3} \quad (3.7)$$

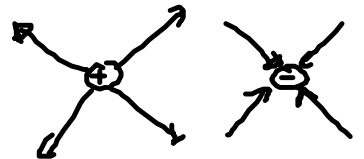
... Fernwirkungsstandpunkt!

• Nahwirkungsstandpunkt:

(1) Ladungen q_i erzeugen elektr. Feld:

$$\underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i q_i \frac{\underline{r} - \underline{r}_i}{|\underline{r} - \underline{r}_i|^3} \quad (3.8)$$

NB. \underline{E} zeigt weg von $q > 0$ und auf $q < 0$



(2) Kraft auf Testladung q_0 : $\underline{F} = q_0 \underline{E}(\underline{r}) \quad (3.9)$

also: Kraft durch elektr. Feld!

• kontinuierliche Ladungsverteilung: $q_i = \rho(\underline{r}_i) \Delta V_i$

$$\stackrel{(3.8)}{\sum_i} \rightarrow \int \dots d^3 r' \quad \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3 r' \quad (3.10)$$

3.3 Feldgleichungen der Elektrostatik

2.3.1 Grundlagen

- elektrostatisches Potential:
mit $\nabla \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} = -\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2} \nabla |\underline{r}-\underline{r}'| \stackrel{\nabla |\underline{r}| = \nabla r = \frac{\underline{r}}{r}}{=} -\frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}$

$$(3.10) \rightarrow \boxed{\underline{E} = -\nabla \phi \quad \text{mit} \quad \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} d^3r'} \quad (3.11)$$

$$\leftrightarrow \text{rot } \underline{E} = 0 !!$$

Bsp.: Potential Punktladung: $\rho(\underline{r}) = q \delta(\underline{r}-\underline{r}_0)$ in (3.11)

$$\rightarrow \boxed{\phi(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\underline{r}-\underline{r}_0|}} \quad (3.13)$$

- Quellen des elektr. Feldes:

$$\text{div } \underline{E} \stackrel{(3.11)}{=} -\nabla^2 \phi = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}_{\stackrel{!}{=} -4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}')} d^3r' = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r}) \quad (3.14)$$

→ Feldgleichungen der Elektrostatik:

$$(3.15) \quad \boxed{\text{div } \underline{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\underline{r})} \quad \dots \text{ Gaußsches Gesetz}$$

... Ladung = Quelle von \underline{E}

$$(3.16) \quad \boxed{\text{rot } \underline{E} = 0} \quad \dots \text{ Wirbelfreiheit}$$

NB: mit $\underline{D} = \epsilon_0 \underline{E}$ (im Vakuum)

$$(3.15) \rightarrow \boxed{\text{div } \underline{D} = \rho(\underline{r})} \quad (3.17)$$

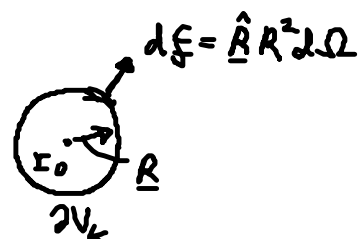
- Integrale Formulierungen:

$$(1) \int_V \text{div } \underline{E} d^3r = \int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} \stackrel{(3.15)}{=} \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho(\underline{r}) d^3r$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{\partial V} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{1}{\epsilon_0} Q} \quad (3.18)$$

Fluß aus $V = \frac{1}{\epsilon_0}$ Gesamtladung

Bsp. Punktladung: $\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\underline{r}-\underline{r}_0}{|\underline{r}-\underline{r}_0|^3}$
 $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \frac{\hat{R}}{R^2}$



$$\int_{\partial V_K} \underline{E} \cdot d\underline{f} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\partial V_K} \frac{\hat{R}}{R^2} \cdot \hat{R} R^2 d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \checkmark$$

(2) Arbeitsintegral:
 an Pkt. Ladg q verrichtete Arbeit gegen
 elektr. Kraft $q \underline{E}$

$$W = -q \int_C \underline{E} \cdot d\underline{r} \stackrel{(3.14)}{=} q \int_C \underline{\nabla} \phi \cdot d\underline{r} = q \int d\phi$$

$$\rightarrow \boxed{W = q [\phi(2) - \phi(1)]} \quad (3.19)$$

Spannung = Potentialdifferenz

insbesondere: $\oint \underline{E} \cdot d\underline{r} = 0$ (3.20)

... keine geschlossene Feldlinien
 = Zirkulation in Elektrostatik

3.2.2 Potentialgleichungen

• Gl. (3.14) $\rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho}$ (3.21)

... Poisson-Gleichung

$\rho=0$... Laplace Gleichung

- Lösung:

allgemein: $\phi(\underline{r}) = \int G(\underline{r}-\underline{r}') \rho(\underline{r}') d^3r'$ (3.22)

mit Greensche Fkt: $\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}') \stackrel{(3.14)}{=} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}}$ (3.22)

insbesondere: $\boxed{\rho(\underline{r}) = \delta(\underline{r}-\underline{r}_0) \stackrel{(3.22)}{\rightarrow} \phi(\underline{r}) = G(\underline{r}-\underline{r}_0)}$ (3.23)

... G ist Lsg. für δ -Inhomogenität

- also (3.22) & (3.23) in (3.21)

$$\boxed{\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_0|} = -4\pi \delta(\underline{r}-\underline{r}_0)} \quad (3.24)$$

Beweis: $\underline{r} - \underline{r}_0 \rightarrow \underline{r}$ und $r = |\underline{r}|$

(1) $r \neq 0$: $\nabla^2 \frac{1}{r} \stackrel{(3.24)}{=} 0$

explizit $\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} = -\nabla \cdot \frac{1}{r^2} \underbrace{\nabla r}_{\hat{r}} = -\nabla \cdot \frac{\hat{r}}{r^2}$
 $= -\nabla \cdot \frac{\underline{r}}{r^3} = -\left(\frac{1}{r^3} \nabla \cdot \underline{r} + \underline{r} \cdot \nabla \frac{1}{r^3} \right)$
 $= -\left(\frac{3}{r^3} - 3\underline{r} \cdot \frac{1}{r^4} \underline{r} \right) = 0 \checkmark$

(2) $r=0$: $\int_{V_\epsilon} \nabla^2 \frac{1}{r} d^3r = -4\pi$

\ominus $r=0$
 $V_\epsilon \dots$ Kugel

explizit
 Gauß $\int_{V_\epsilon} \nabla \frac{1}{r} \cdot d\underline{f} = -\int_{\hat{r}} \frac{\hat{r}}{r^2} \cdot \underbrace{d\underline{f}}_{\hat{r} r^2 d\Omega}$
 $= -\int_{V_\epsilon} d\Omega = -4\pi \checkmark$

• Feldlinien:

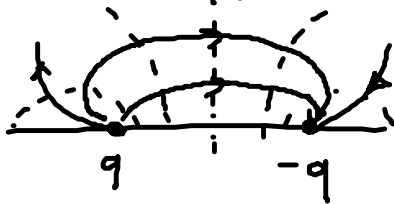
- Äquipotentiallinien: $\phi = \text{konst}$

- Feldlinien $\underline{r}(s)$: $\underline{E}(\underline{r}) = -\nabla\phi$ ist tangential dazu

$$\frac{d\underline{r}(s)}{ds} = \frac{\underline{E}(\underline{r}(s))}{|\underline{E}(\underline{r}(s))|} \quad (3.25)$$

(2) $\perp \phi = \text{konst}$

Bsp: elektr. Dipol



--- $\phi = \text{konstant}$
 ——— Feldlinien