4.4. Elektrostatische Energie im Dielektrikum

• Energie einer makroskopischen Ladungsverteilung $\rho = \rho_{Ma}$:

im Vakuum: $U = \frac{1}{2}\int \rho(\underline{r})\,\Phi(\underline{r})\,d^3r$ (3.29)

≙ Arbeit, um Ladungsverteilung zusammenzubringen

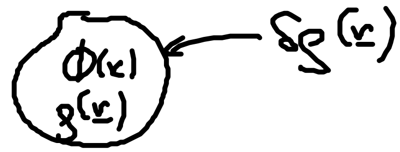
im Dielektrikum: $U = ??$

auch Arbeit um $\underline{P}$ in Dielektrikum zu erzeugen

• Berechnung:

(1) Änderung von U durch Hinzufügen von $\delta\rho$ bei $\Phi(\underline{r})$:

$$\delta U = \int \Phi(\underline{r})\,\delta\rho(\underline{r})\,d^3r$$



mit $\underline{\nabla}\cdot\underline{D} = \rho \longrightarrow \delta\rho = \underline{\nabla}\cdot\delta\underline{D}$

$$\longrightarrow \delta U = \int \Phi(\underline{r})\,\underline{\nabla}\cdot\delta\underline{D}\,d^3r \;\underset{\text{Oberflächenterm} = 0}{\overset{\text{part. Integ.}}{=}}\; \underbrace{-\int \underline{\nabla}\Phi(\underline{r})}_{\underline{E}(\underline{r})}\cdot\delta\underline{D}\,d^3r$$

$$\longrightarrow \boxed{\delta U = \int \underline{E}(\underline{r})\cdot\delta\underline{D}\,d^3r} \quad (4.41)$$

(2) lineares Dielektrikum: $\underline{D} = \varepsilon\,\underline{E} \longrightarrow \underline{E}\cdot\delta\underline{D} = \frac{1}{2}\,\delta(\underline{E}\cdot\underline{D})$

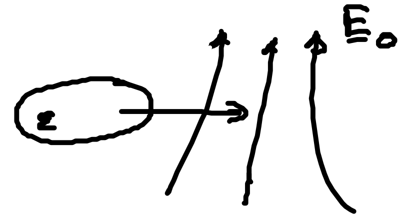
$\int\delta(\underline{E}\cdot\underline{D}) = \underline{E}\cdot\underline{D}$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\int \underline{E}\cdot\underline{D}\,d^3r = \frac{1}{2}\int \rho_{Ma}(\underline{r})\,\Phi(\underline{r})\,d^3r} \quad (4.42)$$

$$= -\frac{1}{2}\int \underline{\nabla}\Phi\cdot\underline{D}\,d^3r \;\overset{\text{part. Integ}}{=}\; \frac{1}{2}\int \Phi\,\underbrace{\underline{\nabla}\cdot\underline{D}}_{\rho_{Ma}}\,d^3r$$

NB: lineares Dielektrikum: dieselbe Form (3.29) wie im Vakuum aber mit ρ_{Ma}

• Bringe lineares Dielektrikum in Feld $\underline{E}_0$:



$$\longrightarrow \boxed{U = -\frac{1}{2}\int \underline{P}\cdot\underline{E}_0\,d^3r}$$

... zu leistende Arbeit

= Energie

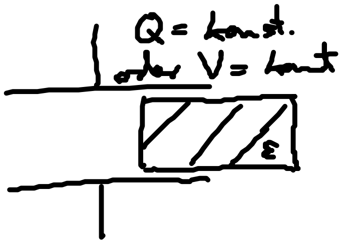
Beweis: Übungen

NB: (i) Dipolenergie von $\underline{P}\,d^3r$ in $\underline{E}_0$ [s. Gl. (3.90)]

(ii) $\frac{1}{2}$, weil $\underline{P}$ durch $\underline{E}_0$ erst induziert wird

(iii) Dielektrikum wird in Gebiet mit wachsendem $\underline{E}_0$ und/oder wachsendem $\underline{P}$ gezogen, da U dann abnimmt

• Übung: Mit welcher Kraft wird Dielektrikum in Kondensator gezogen?



(1) bei konstanter Ladung Q?

(2) " " Spannung V?

5. Magnetostatik

• Erinnerung: Elektrostatik

Ladungen $\longrightarrow$ Coulombgesetz $\longrightarrow$ $\underline{E}$-Feld $\xrightarrow{\rho}$ $\operatorname{div}\underline{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho$, $\operatorname{rot}\underline{E} = 0$

• jetzt: Magnetostatik

Ströme $\longrightarrow$ Kraftwirkung & $\underline{B}$-Feld $\xrightarrow[\text{dichte } j]{\text{Strom-}}$ integrale / differentielle Formulierung

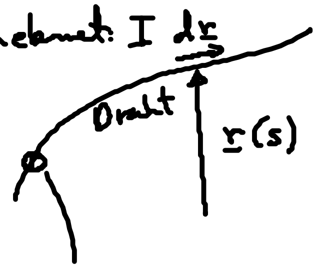
stationär

$\longleftrightarrow$ Ähnlichkeiten & Unterschiede

5.1 Strom, Stromdichte & Kontinuitätsgleichung

- Strom durch Draht:

Stromelement: $I\,d\underline{r}$

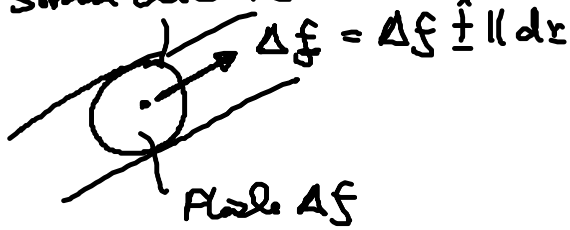


Strom: $\boxed{I = \frac{\text{Ladung}}{\text{Zeit}} = \frac{dq}{dt}}$ (5.1)

Einheit: 1 A(mpère) MKSA-System

Ladungserhaltung:
$\longrightarrow$ I = konstant entlang Draht

- Stromdichte



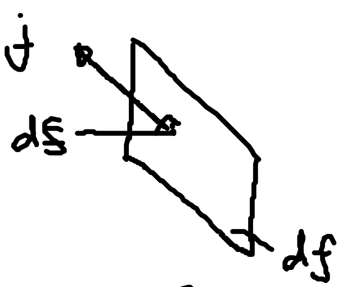
(1) $\boxed{\underline{j} = \frac{\text{Strom}}{\text{Fläche}} = \frac{I}{\Delta f}\frac{d\underline{r}}{ds}}$ (5.2)

$\underline{\Delta f\, ds} = d^3r$ $\boxed{\underline{j}\, d^3r = I\, d\underline{r}}$ (5.3)

wichtig: Übergang Leiter $\rightarrow$ Kontinuumsbeschreibung

(2) Strom durch Fläche mit $d\underline{f}$:

$\underline{j} \cdot d\underline{f}$



(3) Ladungsdichte $\rho(\underline{r},t)$
Geschwindigkeit $\underline{v}(\underline{r},t)$
$\Big\} \longrightarrow$ Stromdichte: $\boxed{\underline{j} = \rho\, \underline{v}}$ (5.4)

denn: $\underline{j} \cdot d\underline{f} = \rho\, \underline{v} \cdot d\underline{f} = \frac{\text{Ladung durch } df}{\text{Zeit}}$

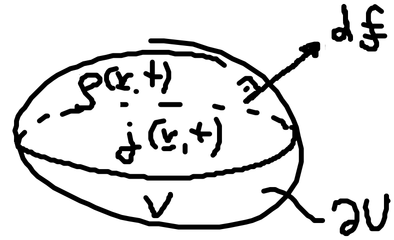
(4) mikroskopische Definition:

$$\rho = \sum_i q_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \quad \& \quad \underline{j} = \sum_i q_i\, \underline{v}_i\, \delta(\underline{r} - \underline{r}_i) \quad (5.5)$$

... Ladungsdichte

Geschw. von q_i

• Kontinuitätsgleichung:



$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho(\underline{r},t)\, d^3r =$$

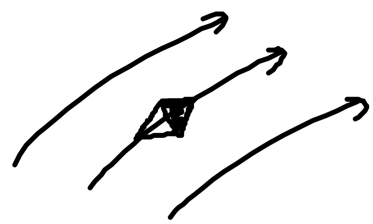
$$= \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho(\underline{r},t)\, d^3r \overset{\text{Ladungserhaltung}}{=} -\int_{\partial V} \underline{j}\cdot d\underline{f} \overset{\text{Gauß}}{=} -\int_V \mathrm{div}\,\underline{j}\, d^3r$$

$$\longrightarrow \boxed{\frac{\partial}{\partial t}\rho + \mathrm{div}\,\underline{j} = 0} \quad (5.6)$$

• Magnetostatik: $\frac{\partial}{\partial t}\rho = 0 \longrightarrow \boxed{\mathrm{div}\,\underline{j} = 0}$ (5.7)

5.2 Leiter & Magnetfeld

• Experimentelle Beobachtung:



Magnetfelder existieren: Magnetit & Erde

Ausmessen durch Magnetnadel

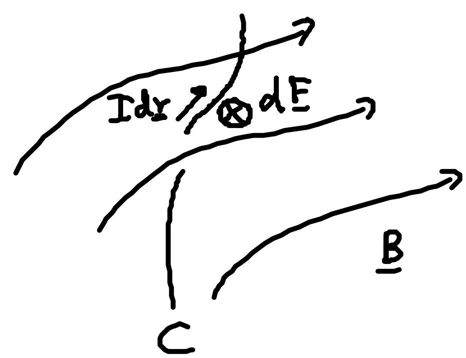
Oersted → (i) Stromdurchflossene Leiter erzeugen Magnetfeld

Ampère (ii) Magnetfeld: Kraftwirkung auf Leiter

} quantitative Messungen

• Kräfte:

(i) auf Leiterelement:



$dF \sim I|d\underline{r}|$ & $d\underline{F} \perp d\underline{r}, \underline{B}$

$$\longrightarrow \boxed{d\underline{F}(\underline{r}) = I\, d\underline{r} \times \underline{B}} \quad (5.8)$$

... Definition der magnetischen Induktion/Flußdichte $\underline{B}$!

(salopp: „Magnetfeld", streng ist das $\underline{H}$)

NB: 1. Einheit $\underline{B}$: $\frac{N}{Am} = 1\,$Tesla

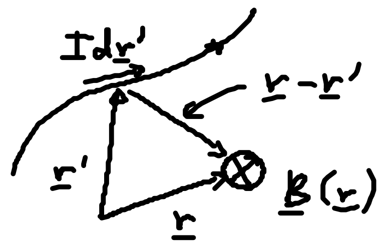
2. Vgl: $\underline{F} = q\underline{E}$!

(ii) Kraft auf Leiter:

$$\boxed{\underline{F} = I \int_C d\underline{r} \times \underline{B}(\underline{r})} \quad (5.9)$$

- Magnetische Induktion:

(i) eines Leiterelements:



$$|d\underline{B}| \sim I |d\underline{r}'|, \ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|^2}$$

$$d\underline{B} \perp d\underline{r}', \ \underline{r}-\underline{r}'$$

$$\longrightarrow \boxed{d\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \, I \, d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3}} \quad (5.10)$$

... Biot-Savartsches Gesetz für Leiter

NB: (1) $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \frac{N}{A^2}$

μ_0 ... magnetische Feldkonstante
" Vakuumpermeabilität

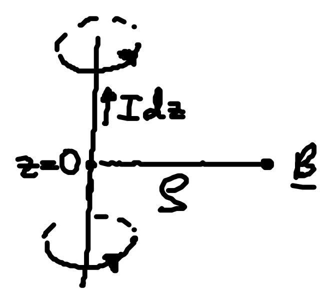
(2) $d\underline{B} \sim \frac{1}{r^2}$, wie $\underline{E}$ von Punktladung

aber: isolierte $I d\underline{r}$ existiert nicht!

(ii) gesamter (geschlossener) Leiter:

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \oint d\underline{B}(\underline{r})} \quad (5.11)$$

(iii) gerader, unendlich langer Leiter:



Zylindersymmetrie

$\underline{B} = B(\varrho) \, \underline{e}_\varphi$ ... Wirbelfeld

$\xrightarrow{(5.10) \ \& \ (5.11)}$

$|d\underline{r}' \times (\underline{r}-\underline{r}')| = \varrho \, dz$

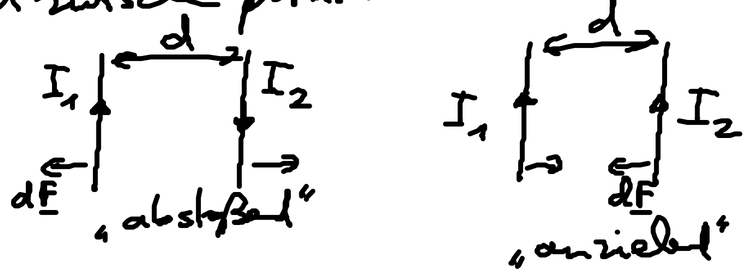
$|\underline{r}-\underline{r}'|^3 = (\varrho^2+z^2)^{3/2}$

$$\boxed{\begin{aligned} B(\varrho) &= \frac{\mu_0}{4\pi} I \varrho \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dz}{(\varrho^2+z^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{\varrho} \end{aligned}} \quad (5.12)$$

... Biot-Savartsche Gesetz (historisch)

Beweis: „Übung"

- Kraft zwischen parallelen Leitern:



pro Längeneinheit:
(5.12) & (5.8)

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{(i)} & \dfrac{dF}{dz} \perp \text{Leiter} \\ \text{(ii)} & \dfrac{dF}{dz} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I_1 I_2}{d} \end{array}} \quad (5.13)$$

Ampère-Definition:

(5.14) **Parallele Leiter der Länge 1m und im Abstand 1m, durch die Strom der Stärke 1 A (Ampère) (in gleicher Richtung) fließt, ziehen sich mit einer Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N an.**