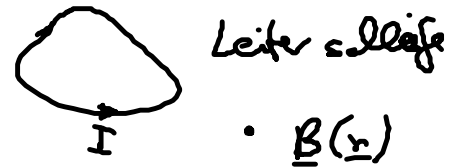
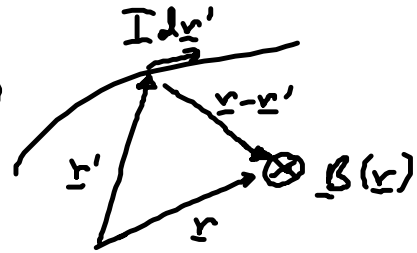


5.2 Leiter & Magnetfeld

$$d\underline{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I d\underline{r}' \times \frac{\underline{r}-\underline{r}'}{|\underline{r}-\underline{r}'|^3} \quad (5.10)$$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \oint d\underline{B}(\underline{r})$$

Integration über
Leiterschleife



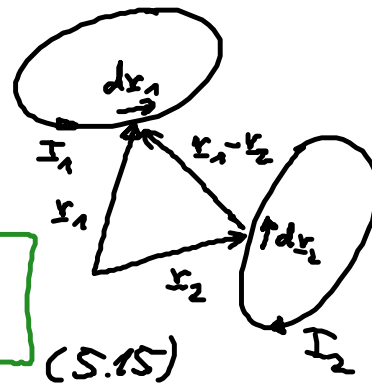
- Kraft zwischen Leiterschleifen:

[Kraft auf Leiter:

$$\underline{F} = I \int_C d\underline{r} \times \underline{B} \quad (5.9)$$

von 2 \rightarrow 1:

$$\underline{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi} I_1 I_2 \iint \frac{\underline{r}_1 - \underline{r}_2}{|\underline{r}_1 - \underline{r}_2|^3} d\underline{r}_1 \cdot d\underline{r}_2$$



Beweis: Übung

5.3 Grundgleichungen der Magnetostatik

- Übergang von Stromelement $I d\underline{r}$ \rightarrow Stromdichte $\underline{j}(\underline{r})$
 mit $I d\underline{r} = \underline{j}(\underline{r}) d^3r$



- Kraft auf Stromgebiet:

(5.9) \rightarrow
$$\underline{F}(\underline{r}) = \int \underline{f}(\underline{r}) d^3r = \int \underline{j}(\underline{r}) \times \underline{B}(\underline{r}) d^3r \quad (5.16)$$

NB: Punktladung q

$$\underline{j} = q \underline{v} \delta(\underline{r} - \underline{r}(t)) \rightarrow$$

$$\underline{F}(\underline{r}) = q [\underline{v} \times \underline{B}(\underline{r}, t) + \underline{E}(\underline{r}, t)] \quad (5.17)$$

... Lorentzkraft!

zusätzlich elektr. Feld!

• magnet. Induktion:

(5.10) \rightarrow

$$\underline{B}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{j}(\underline{r}') \times \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3 r' \quad (5.18)$$

NB: vgl. $\underline{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\underline{r}') \frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^3} d^3 r'$

• Vektorpotential: mit $\frac{\underline{r} - \underline{r}'}{|\underline{r} - \underline{r}'|^2} = -\nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$

$$(5.18) \rightarrow \underline{B}(\underline{r}) = \nabla \times \underline{A}(\underline{r}) \quad \text{mit} \quad \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r' \quad (5.19)$$

$$\rightarrow \text{div } \underline{B} = 0$$

• Wirbel der magnet. Induktion:

$$(i) \text{rot } \underline{B} = \nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla (\nabla \cdot \underline{A}) - \nabla^2 \underline{A}$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \nabla \int \underline{j}(\underline{r}') \cdot \nabla \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \underline{j}(\underline{r}') \underbrace{\nabla^2 \frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|}}_{-4\pi \delta(\underline{r} - \underline{r}')} d^3 r'$$

part. Integ. & Oberfläch = 0

$$= 0, \text{ da } \nabla' \cdot \underline{j}(\underline{r}') = 0$$

$$= \mu_0 \underline{j}(\underline{r}) \quad (5.21a)$$

\rightarrow Feldgleichungen der Magnetostatik

(5.20)

$$\text{div } \underline{B} = 0$$

... keine magnet. Monopole!

(5.21)

$$\text{rot } \underline{B} = \mu_0 \underline{j}(\underline{r})$$

... Ampèresches Gesetz
Strome = Wirbel von \underline{B}

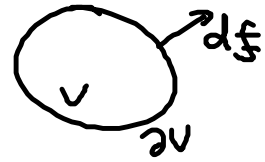
NB: mit $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$ (im Vakuum)

$$(S.21) \rightarrow \boxed{\text{rot } \underline{H} = \underline{j}(\underline{r})} \quad (S.22)$$

• integrale Formulierungen:

$$(1) \int_V \text{div } \underline{B} d^3r = 0$$

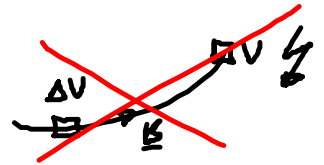
$$\xrightarrow{\text{Grob}} \boxed{\int_{\partial V} \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0} \quad (S.23)$$



... magnetischer Fluss aus $V = 0$

NB: „Anzahl der Feldlinien in = aus V heraus“

→ Feldlinien sind geschlossen!



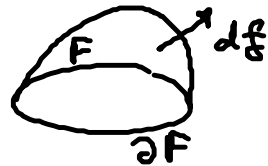
$$(2) \int_F \text{rot } \underline{B} \cdot d\underline{f} \stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_{\partial F} \underline{B} \cdot d\underline{r}$$

$$\stackrel{(S.21)}{=} \mu_0 \int_F \underline{j} \cdot d\underline{f}$$

$$\rightarrow \boxed{\int_{\partial F} \underline{B} \cdot d\underline{r} = \mu_0 I} \quad (S.24)$$

Zirkulation entlang ∂F
 $= \mu_0 \times$ Strom durch F !

NB: unabh. von F bei gleichem ∂F !

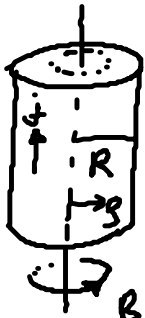


• Poisson'sche Gleichung für \underline{A} :

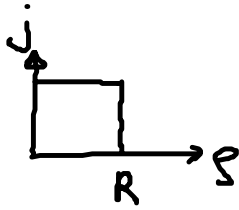
$$(S.21a) \rightarrow \boxed{\nabla^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{j}} \quad (S.25)$$

$$\text{mit } \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3r' \quad (S.19)$$

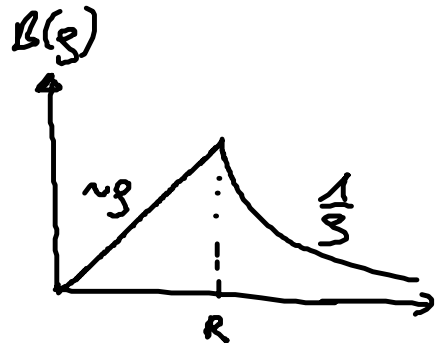
• Bsp: homogen durchflossener Draht



$$\underline{B} = B(\rho) \underline{e}_\phi$$



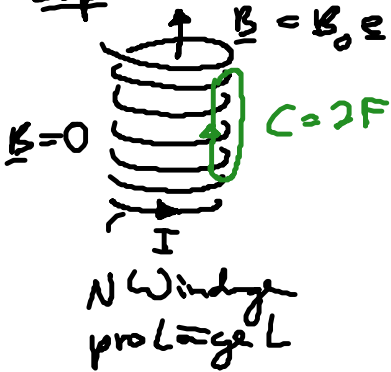
integrables
Ampère -
Gesetz (5.24)



Beweis: Übungen

• Bsp: unendlich lange Spule

Strom durch F



N Windungen
pro Länge L

$$(1) \oint \underline{B} \cdot d\underline{r} = L B_0 \stackrel{\downarrow}{=} \mu_0 N I$$

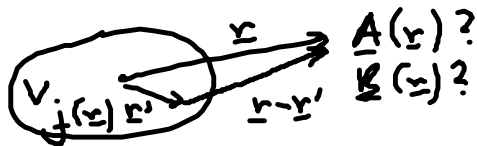
$$\Leftrightarrow B_0 = \mu_0 \frac{N}{L} I \quad (5.26)$$

$$(2) \underline{A} = A(\rho) \underline{e}_\phi \dots \text{zirkuliert um } \underline{B}!$$

Beweis: s. Übung

5.4 Kleine Stromverteilungen: der magnet. Dipol

Motivation: lokalisierte Stromverteilung



magn. Dipol:
Definition &
Eigenschaft

statisch \Leftrightarrow (5.6) $\text{div } \underline{j} = 0$

5.4.1. Felder kleiner Stromverteilung

Entwickle nach Punkte der Stromverteilung:

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r' \quad (5.19)$$

mit $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \stackrel{\text{Taylor um } \underline{r}}{=} \frac{1}{r} + \frac{\underline{r} \cdot \underline{r}'}{r^3} + \dots$ (s. Kap. 3.6)

$\underbrace{-\underline{r}' \cdot \nabla}_{\text{Taylor um } \underline{r}} \frac{1}{r}$

$$\rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \left[\frac{1}{r} \int \underline{j}(\underline{r}') d^3 r' + \frac{\underline{r}}{r^3} \cdot \int \underline{r}' j(\underline{r}') d^3 r' + \dots \right] \quad (5.27)$$

(1) Hilfsatz:

Für $\text{div } \underline{j} = 0$ und beliebige g, f gilt $\int \underline{j} \cdot \nabla(gf) d^3 r = 0$

(5.28)

Beweis: $\int \nabla \cdot (gf \underline{j}) d^3 r \stackrel{\text{Gauß}}{=} \int \frac{\partial}{\partial \nu} (gf \underline{j} \cdot \underline{dS}) = 0$

$\nabla \cdot \underline{j} = 0$ für ∂V außerhalb von $\underline{j} \neq 0$

Produktregel $\int \underline{j} \cdot \nabla(gf) d^3 r + \int gf \underbrace{\nabla \cdot \underline{j}}_{=0} d^3 r = 0$ qed

(2) Es gilt: $\int \underline{j}(\underline{r}) d^3 r = 0$ (5.29)

... „es fließt nichts aus V heraus“
 \rightarrow keine magnet. Monopole!

Beweis. (5.28) mit $g=1, f=x_i$

$$\rightarrow \int j_k \underbrace{\nabla_k (x_i)}_{\delta_{ki}} d^3 r = \int j_i d^3 r = 0 \text{ qed}$$

(3) magnetisches Dipolmoment: (eine Stromverteilung)

Berechne 2. Term in (5.27):

$$\underline{r} \cdot \int \underline{r}' j_k(\underline{r}') d^3 r' = x_i \int \underbrace{x_i' j_k(\underline{r}')}_{\text{Term 2. Stufe}} d^3 r'$$

zerlege: $T_{ik} = \frac{1}{2} \underbrace{(T_{ik} + T_{ki})}_{\text{symmetrisch}} + \frac{1}{2} \underbrace{(T_{ik} - T_{ki})}_{\text{antisymmetrisch} \hat{=} \text{axialer Vektor}}$

$$= x_i \int \left[\underbrace{\frac{1}{2} (x_i' j_k + x_k' j_i)}_{(i)=0!} + \frac{1}{2} (x_i' j_k - x_k' j_i) \right] d^3 r'$$

(i): verwende $\underline{g} = \underline{x}_i'$, $\underline{f} = \underline{x}_k'$ in Gl. (5.28)

$$\rightarrow \int j_i \nabla_i' (\underline{x}_i' \cdot \underline{x}_k') d^3 r' = 0$$
$$= \int (j_i x_k' + j_k x_i') d^3 r' = 0 \text{ qed}$$

zu (ii): $= \frac{1}{2} \int [(\underline{r} \cdot \underline{r}') j - (\underline{r} \cdot \underline{j}) r'] d^3 r' = \frac{1}{2} \int (\underline{r}' \cdot \underline{x}_j) \times \underline{r} d^3 r'$ (S.30)

→ führe ein:

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{r}' \times \underline{j}(\underline{r}') d^3 r' \quad (S.31)$$

... magnet Dipolmoment

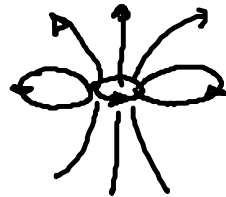
Gl. (5.27)
& (S.31)

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\underline{m} \times \underline{r}}{r^3} \quad (S.32)$$

... Vektorpotential des magnet Dipols

$\underline{r} = r \hat{r}$

$$\underline{B}(\underline{r}) = \text{rot} \underline{A} \stackrel{\circ \underline{B}}{=} - \nabla \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad (S.33)$$
$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\underline{m} \cdot \hat{r}) \hat{r} - \underline{m}}{r^3}$$



... magnet. Induktion von \underline{m}

(in völliger Analogie zum elektr. Dipol)