5.5.2 Einführung der Magnetisierung

- $$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{rot} \underline{b} &= \mu_0 \left(\underline{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \underline{e}}{\partial t} \right) \\ \operatorname{div} \underline{b} &= 0 \end{aligned}} \qquad (5.44)$$

- $\langle \underline{j} \rangle$?

- $$\boxed{\langle \underline{j}_b \rangle = \underline{j}_M(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(\underline{r},t) + \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r},t)} \qquad (5.54)$$

.... Stromdichte der gebundenen Ladungen

mit makroskop. Dichten:

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{Stromdichte:} && \underline{j}_M(\underline{r},t) = \left\langle \sum_n q_n \underline{v}_n \,\delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \right\rangle && (5.5) \\ &\text{Polarisation:} && \underline{P}(\underline{r},t) = \left\langle \sum_n \underline{p}_n \,\delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \right\rangle && (4.13) \\ &\text{Magnetisierung:} && \underline{M}(\underline{r},t) = \left\langle \sum_n \underline{m}_n \,\delta(\underline{r}-\underline{r}_n) \right\rangle && (5.55) \end{aligned}}$$

(5) gemittelte mikroskop. Stromdichte:

$$\begin{aligned} \langle \underline{j}(\underline{r},t) \rangle &\overset{(5.46)}{=} \langle \underline{j}_f(\underline{r},t) \rangle + \langle \underline{j}_b(\underline{r},t) \rangle \\ &\overset{(5.47)}{\underset{(5.54)}{=}} \underbrace{\underline{j}_F(\underline{r},t) + \underline{j}_M(\underline{r},t)}_{\underline{j}_{Ma}(\underline{r},t)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\underline{P}(\underline{r},t) + \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r},t)}_{\underline{j}_{Mi}(\underline{r},t)} \end{aligned} \qquad (5.56)$$

• makroskop. Feldgleichungen: $\langle (5.44) \rangle$

$$\longrightarrow \langle \mathrm{rot}\,\underline{b} \rangle = \mu_0 \left(\langle \underline{j} \rangle + \varepsilon_0 \frac{\partial \langle \underline{e} \rangle}{\partial t} \right) \;\&\; \langle \mathrm{div}\,\underline{b} \rangle = 0 \quad (5.57)$$

$\xrightarrow{(5.45)}$ & $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E} + \underline{P}$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\underline{B} &= \mu_0 \left[\underline{j}_{Ma}(\underline{r},t) + \underline{j}_{Mi}(\underline{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \underline{E}(\underline{r},t) \right] \\ &= \mu_0 \left[\underline{j}_{Ma}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t) + \underline{\nabla} \times \underline{M}(\underline{r},t) \right] \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (5.58)$$

• Führe ein: magnetisches/Magnet-Feld

$$\boxed{\begin{aligned} \underline{H}(\underline{r},t) &= \frac{1}{\mu_0} \underline{B}(\underline{r},t) - \underline{M}(\underline{r},t) \\ \longleftrightarrow \quad \underline{B}(\underline{r},t) &= \mu_0 \left[\underline{H}(\underline{r},t) + \underline{M}(\underline{r},t) \right] \end{aligned}} \quad (5.59)$$

NB. Magnetisierung wird in Hilfsfeld $\underline{H}(\underline{r},t)$ gesteckt
$\longrightarrow$ Materialgesetze nötig

<u>also</u>:

(5.58) $\longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} \mathrm{rot}\,\underline{H} &= \underline{j}_{Ma}(\underline{r},t) + \frac{\partial}{\partial t} \underline{D}(\underline{r},t) \\ \mathrm{div}\,\underline{B} &= 0 \end{aligned}} \quad (5.60)$$

NB: (i) „Die Wirbel von $\underline{H}$ sind makroskop. Stromdichte und der dielektr. Verschiebungsstrom $\frac{\partial}{\partial t}\underline{D}$"

(ii) $\underline{B}$ ist das fundamentale Feld!

(iii) Merke (5.60)

auch im Vakuum: $\underline{B} = \mu_0 \underline{H}$, $\underline{D} = \varepsilon_0 \underline{E}$

5.5.3 <u>Materialgesetze & Randbedingungen</u>

• <u>lineare</u> Materialgesetze:

(i) anisotrop: $\boxed{M_i(H) = \chi_{m_{ij}} H_j}$ (5.61)

$\underline{\underline{\chi}}_m$ … Tensor der magnet. Suszeptibilität

NB: (i) $\underline{M} = \underline{M}(\underline{H})$, nicht $\underline{M} = \underline{M}(\underline{B})$

Hilfsfeld ... fundamentales Feld

vgl. $\underline{P} = \underline{P}(\underline{E})$!

(ii) $\underline{M} \nparallel \underline{H}$

$$\boxed{\begin{aligned}\underline{B} &= \mu_0 (\underline{H} + \underline{M}) = \underline{\underline{\mu}}\, \underline{H} \\ \text{mit } \underline{\underline{\mu}} &= \mu_0 (\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{\chi}}_m)\end{aligned}} \quad (5.62)$$

... Tensor der magnet. Permeabilität

(ii) isotrop:

$$\boxed{\underline{M} = \chi_m \underline{H} \quad \& \quad \underline{B} = \mu \underline{H} = \mu_0 (1 + \chi_m) \underline{H}} \quad (5.63)$$

relative Permeabilität:

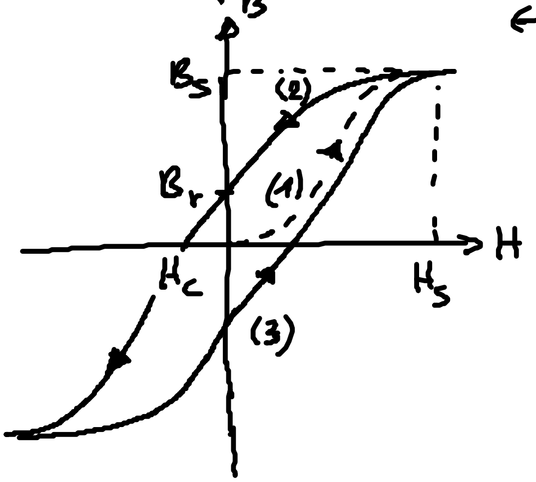
$$\boxed{\mu = \mu_0 (1 + \chi_m) = \mu_0 \mu_r \quad \& \quad \mu_r = 1 + \chi_m} \quad (5.64)$$

NB. (1) $|\mu_r - 1| \approx 10^{-6}$

(2) $\mu_r > 1$: Paramagnetismus: $\underline{M} \parallel \underline{H}$
$\chi_m > 0$ Ausrichtung von atomaren/molekularen magnet. Momenten $\underline{m}$

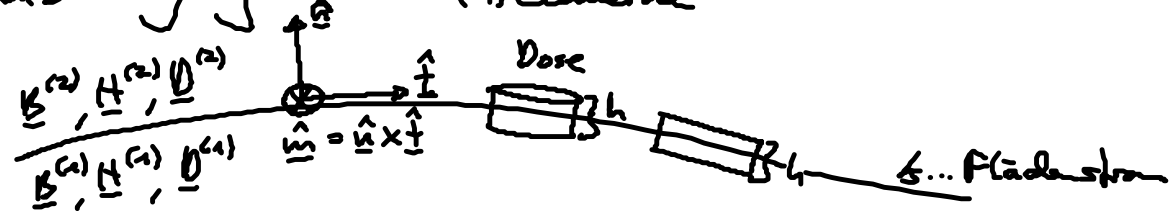
(3) $\mu_r < 1$: Diamagnetismus: $\underline{M} \uparrow\downarrow \underline{H}$
$\chi_m < 0$ Induktion von atomare/molekulare Ringströme $\longrightarrow \underline{m} \uparrow\downarrow \underline{H}$

- Ferromagnetismus: nichtlinearer Zusammenhang $\underline{B} = \underline{B}(\underline{H})$
  $\longleftrightarrow$ Hysterese



(1) Neukurve für magnet. Material
  H_s ... Sättigungsfeldstärke
  B_s ... " wert von $\underline{B}$
(2) $H\downarrow \longrightarrow B_r = B_r(H=0)$
  ... Permanentfeldstärke
  H_c ... Koerzitivkraft, wo $B=0$
(3) Umkehrung: $(3) \neq (1)$
  $\longleftrightarrow$ Hysterese

- Randbedingungen: (1) Geometrie



(2) Normalkomp. von $\underline{B}$: stetig!

$$\operatorname{div} \underline{B} = 0 \xrightarrow{\text{Dose}} \int \operatorname{div} \underline{B}\, d^3x = \int \underline{B} \cdot d\underline{f} = 0 \qquad \boxed{\hat{\underline{n}} \cdot (\underline{B}^{(2)} - \underline{B}^{(1)}) = 0 \longleftrightarrow B_\perp^{(1)} = B_\perp^{(2)}}$$

(5.65)

(3) Tangentialkomp. von $\underline{H}$:

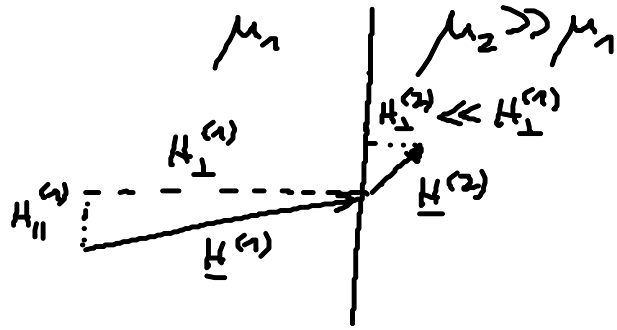
$$\operatorname{rot} \underline{H} = \underline{j}_{ma} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t} \xrightarrow{\text{Schleife}} \int \operatorname{rot} \underline{H} \cdot d\underline{f} \overset{\text{Stokes}}{=} \int \underline{H} \cdot d\underline{s}$$
$$= \int \left(\underline{j}_{ma} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}\right) \hat{\underline{m}}\, df$$

$$\xrightarrow{h \to 0} \boxed{\hat{\underline{t}} \cdot (\underline{H}^{(2)} - \underline{H}^{(1)}) = H_\parallel^{(2)} - H_\parallel^{(1)} = \underline{k} \cdot \hat{\underline{m}}} \quad (5.66)$$

(4) insbes. lineares, isotropes Material: $\underline{B} = \mu \underline{H}$

$$\boxed{\mu_1 H_\perp^{(1)} = \mu_2 H_\perp^{(2)}} \quad (5.67)$$

Material mit $\mu_2 \gg \mu_1$ $\quad (\underline{k} = 0)$



$\mu_2 \to \infty$: $H_\parallel^{(1)} \approx 0$, $\underline{H}^{(1)} \perp$ Grenzfläche

$\longrightarrow$ Region 2 verhält sich wie elektr. Leiter, Oberfläche ist Äquipotentialfläche (s.u.)

5.5.4 Magnetische Skalarpotentiale & Anwendungen

- Magnetostatik:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \& \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j} \qquad (5.60)$$

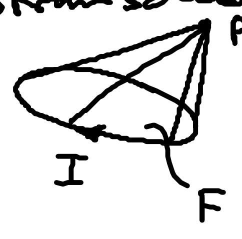
- homogenes, lineares Medium: & $\underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla} \times \underline{H} = 0 \longrightarrow \boxed{\underline{H} = -\underline{\nabla}\phi_M} \qquad (5.68)$$

$$\text{mit } \mu \underline{H} = \underline{B} \text{ in } \underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \longrightarrow \boxed{\underline{\nabla}^2 \phi_M = 0} \qquad (5.69)$$

ϕ_M ... magnet. Skalarpotential

Bsp.: Stromschleife:



Es gilt:

$$\phi_M = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \Omega$$

Ω ... Raumwinkel von F bezogen auf P

Beweis: s. Übungen

- harter Ferromagnet: $\underline{M}$ vorgegeben & $\underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} \overset{(5.59)}{=} \mu_0 \underline{\nabla} \cdot (\underline{H} + \underline{M}) = 0 \quad \& \quad \underline{H} = -\underline{\nabla}\phi_M$$

$$\boxed{\nabla^2 \phi_M = -\rho_M \text{ mit } \rho_M = -\underline{\nabla} \cdot \underline{M}} \qquad (5.70)$$

... effektive magnet. Ladungsdichte

Lösung:

(i) ohne Randflächen: $\boxed{\Phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\nabla' \cdot \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'}$ (5.71)