

# S.5.4 Magnetische Skalarpotentiale & Anwendungen

• Magnetostatik:

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} = 0 \quad \& \quad \underline{\nabla} \times \underline{H} = \underline{j} \quad (5.60)$$

• harter Ferromagnet:  $\underline{M}$  vorgegeben &  $\underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{B} \stackrel{(5.71)}{=} \mu_0 \underline{\nabla} \cdot (\underline{H} + \underline{M}) = 0 \quad \& \quad \underline{H} = -\underline{\nabla} \phi_M$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 \phi_M = -g_M \quad \text{mit} \quad g_M = -\underline{\nabla} \cdot \underline{M}}$$

... effektive magnet. Ladungsdichte

Lösung:

(i) ohne Randflächen:  $\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'} \quad (5.71)$

part. Integ  $\rightarrow$   
 $\& \underline{\nabla}' \frac{1}{|\dots|} = -\underline{\nabla} \frac{1}{|\dots|}$

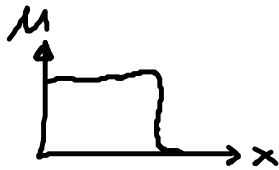
$$\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \cdot \int \frac{\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d^3 r'} \quad (5.72)$$

(ii) Fernfeldentwicklung:  $\frac{1}{|\underline{r} - \underline{r}'|} \approx \frac{1}{r}$

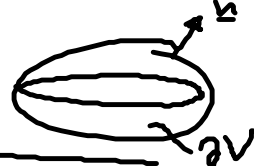
$$\rightarrow \boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{\nabla} \left( \frac{1}{r} \right) \cdot \int \underline{M}(\underline{r}') d^3 r' = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}}{r^3} \quad (5.73)}$$

... D: polfeld

(iii)  $\underline{M}(\underline{r})$  mit Rand:



$\underline{M}(\underline{r}) \neq 0$  in  $V$



(5.71) Beweis übrige!

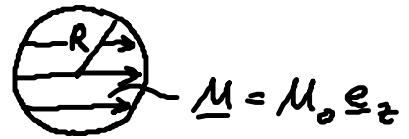
$$\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\underline{\nabla}' \cdot \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} + \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial V} \frac{\underline{n}' \cdot \underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r} - \underline{r}'|} d\Omega} \quad (5.74)$$

NB: (1)  $G_m = \underline{v} \cdot \underline{M}$  ... effektive magnet. Flächeladungsdichte

(2) homogenes  $\underline{M} \rightarrow \Phi_m = \Phi_m[G_m]$

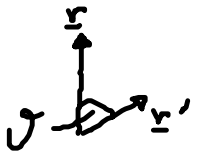
• Beispiele:

(i) homogen magnetisierte Kugel:



$$(S.72) \rightarrow \Phi_m(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{M} \cdot \underline{\nabla} \int \frac{d^3r'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$

$$= -\frac{1}{2} \underline{M} \cdot \underline{\nabla} \int_0^R \int_{-1}^1 \frac{r'^2 dr' d\cos\vartheta}{|r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta|}$$



⋮

(1) Kugelinneres ( $r < R$ ):

$$\rightarrow \Phi_m(\underline{r}) = \frac{1}{3} \underline{M} \cdot \underline{r} \quad (S.75)$$

$$\rightarrow \underline{H}_{in} = -\underline{\nabla} \Phi_m = -\frac{1}{3} \underline{M} \quad (S.76)$$

$$\underline{B}_{in} = \mu_0 (\underline{H}_{in} + \underline{M}) = \frac{2}{3} \mu_0 \underline{M}$$

NB:  $\underline{H}_{in} \perp \underline{M} \parallel \underline{B}_{in}$

(2) Kugeläußeres ( $r > R$ ):

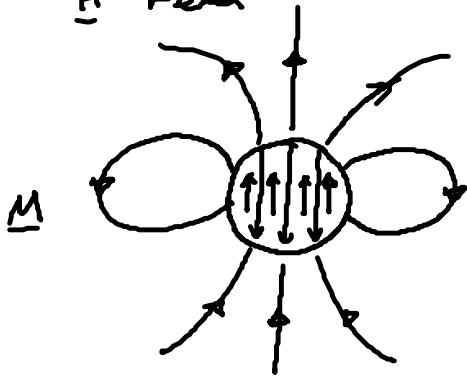
$$\rightarrow \Phi_m(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{m \cdot \underline{r}}{r^3} \quad \text{mit } m = \frac{4\pi}{3} R^3 \underline{M}$$

... Dipolfeld

$$\rightarrow \underline{H}_a = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_a = -\underline{\nabla} \Phi_m$$

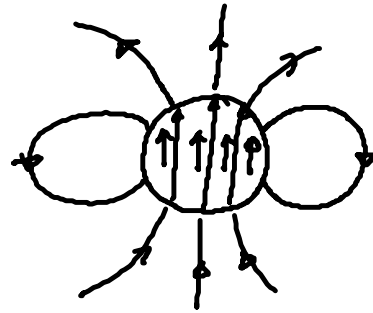
(3) Skizze:

$\underline{H}$ -Feld



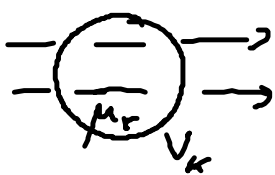
$G_M = \text{Quelle von } \underline{H}$   
 $\rightarrow$  Spurgang Kugelrad

$\underline{B}$ -Feld:



$\underline{B} = \text{reines Wirbelfeld (div } \underline{B} = 0)$   
 $= \text{geschlossene Feldlinien!}$

(ii) magnetisierbare Kugel: in  $\underline{B}_0$



$$\underline{M} = (\mu_r - 1) \underline{H}_{in} \quad (5.77)$$

Annahme: homogen in  $V_K$

Maxwell-Gl. linear

$\rightarrow$  addiere  $\underline{B}_0$  zu (5.76)

$$\underline{B}_{in} = \underline{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3} \underline{M} \quad (5.78)$$

$$\underline{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_0 - \frac{1}{3} \underline{M}$$

„Entmagnetisierungsfeld“

[vgl. Kap. 4.3.2:  $\underline{E}_{in} = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\epsilon_0} \underline{P}$  (4.32)]

(5.77)

$$\underline{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_0 - \frac{\mu_r - 1}{3} \underline{H}_{in}$$

$$\underline{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0} \frac{3}{\mu_r + 2} \underline{B}_0 \quad (5.75)$$

in (5.77)

$$\underline{M} = \frac{3}{\mu_0} \frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2} \underline{B}_0$$

## 5.6 Faradaysches Induktionsgesetz

- Bisher:
 

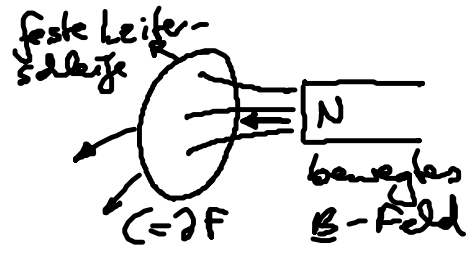
Magnetostatik:	$\underline{B}, \underline{H}, \underline{j}$	} getrennt
Elektrostatik:	$\underline{E}, \underline{D}, \underline{S}$	

2 Hinweis auf zeitabh. Phänomene:  $\text{rot } \underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$

- Ein Schub:  $\text{rot } \underline{E} \leftrightarrow \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

### 5.6.1 Integrale & differentielle Formulierung

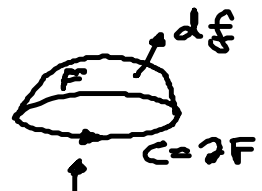
- 1. Grundexperiment: von Faraday



- 2 Größen:

(i) magnetischer Fluss durch  $F$ :

$$\boxed{\Phi_B = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}} \quad (5.80)$$



Wegorientierung: Rechte-Hand-Regel

(ii) elektrische Ringspannung (Zirkulation) entlang  $C = \partial F$ :

(= elektromotorische Kraft (EMK))

$$\boxed{\mathcal{Z}_E = \int_{C=\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{r}} \quad (5.81)$$

NB: treibt Strom in Leiterschleife

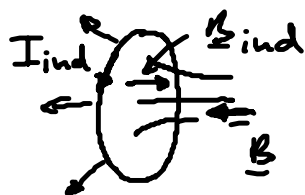
• integrale Formulierung:

$$\mathcal{E}_E = - \frac{d}{dt} \Phi_B \iff \int_{C=\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{r} = - \frac{d}{dt} \int \underline{B} \cdot d\underline{f} \quad (5.82)$$

„Die zeitliche Änderung des magnet. Flusses durch eine Leiterschleife ruft eine Krümmung und damit einen Strom hervor.“

NB: 1. negatives Vorzeichen  $\iff$  Lenz'sche Regel

„Das induzierte  $\underline{E}$ -Feld / der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Ursache der magnet. Flussänderung entgegenwirkt“ (5.83)



2. kein Vorfaktor: (5.82) führt auf Lorentzkraft (c.u.)

• differentielle Formulierung:

mit  $\int_{C=\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{r} = \int_F \text{rot } \underline{E} \cdot d\underline{f}$  & G. (5.82) & beliebiges  $F$ :

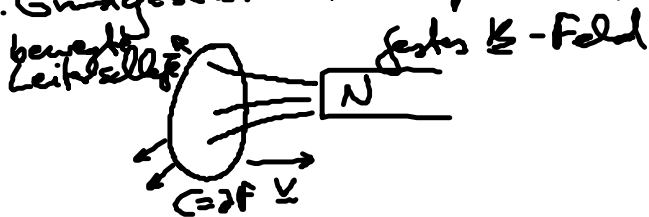
$$\rightarrow \boxed{\text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}} \quad (5.84)$$

„Die Wirbel von  $\underline{E}$  sind durch  $-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$  bestimmt“

### 5.6.2 Bewegter Leiter

• (5.84) sagt nichts über Leiter aus!  $\rightarrow$

2. Grundgesetz: Prinzip des Dynamos!



• Auswertung von (5.82):

(i) Ringspannung:  

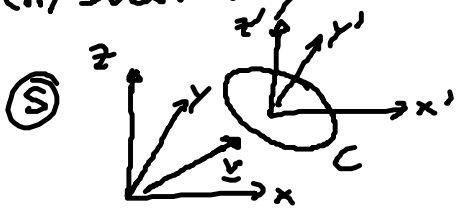
$$z_E = \int_C \underline{E}' \cdot d\underline{r} \quad (S.85)$$

mit  $\underline{E}'$  ... elektr. Feld im Ruhesystem des Leiters

(ii) Inertialsysteme:

S... Laborsystem

S'... Ruhesystem Leiter



$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \quad (S.86)$$

... Galileitransformation

„Physik soll in Inertialsystemen identisch sein“

(iii) magnetischer Fluss: Problem:  $F = F(t)$

$$\frac{d}{dt} \Phi_B = \frac{d}{dt} \int_{F(t)} \underline{B}(\underline{r}, t) \cdot d\underline{f}$$

$$\stackrel{(S.86)}{=} \frac{d}{dt} \int_{F(t)} \underline{B}(\underline{r}' + \underline{v}t, t) \cdot d\underline{f}$$

$$[\text{in } S'] = \int_{\substack{F(t) \\ = F'}} \frac{d}{dt} \underline{B}(\underbrace{\underline{r}' + \underline{v}t}_r, t) \cdot d\underline{f} = \int_{F(t)} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\frac{d\underline{r}'}{dt} \cdot \nabla_r}_{\underline{v}} \right) \underline{B} \cdot d\underline{f}$$

$$= - \nabla \times (\underline{v} \times \underline{B}) + \underbrace{\underline{v} (\nabla \cdot \underline{B})}_{=0}$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt} \Phi_B = \int [\frac{\partial}{\partial t} - \nabla \times (\underline{v} \times)] \underline{B} \cdot d\underline{f}$$

$$\stackrel{\text{Stokes}}{=} \int_F \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \cdot d\underline{f} - \int_{\partial F} (\underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{r} \quad (S.86)$$

(iv) Transformation von elektr. Feld:  $z_E = - \frac{d}{dt} \Phi_B$

$$\stackrel{(S.85) \& (S.86)}{\rightarrow} \int_{C=\partial F} (\underline{E}' - \underline{v} \times \underline{B}) \cdot d\underline{r} = - \int_F \frac{\partial}{\partial t} \underline{B} \cdot d\underline{f}$$

$\Rightarrow$  elektr. Feld im Laborsystem:  $\underline{E} = \underline{E}' - \underline{v} \times \underline{B}$  (5.87)

„Beweis“: Lorentzkraft auf Ladung  $q$  im Leiter:

$$\begin{aligned} \underline{F} &= q \underline{E}' \quad \dots \text{ in } S' \text{ ruht } q \\ &= q (\underbrace{\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}}_{\underline{E}'}) \quad \dots \text{ in } S \text{ bewegt sich } q \end{aligned}$$

NB:

Gl. (5.87) = Galilei-Transformationsgesetz für  $\underline{E}$ !  
gültig für  $v \ll c$ , sonst Lorentz-Transf!