5.5.4 Magnetische Skalarpotentiale & Anwendungen

- Magnetostatik:

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} = 0 \quad \& \quad \underline{\nabla}\times\underline{H} = \underline{j} \qquad (5.60)$$

- harter Ferromagnet: $\underline{M}$ vorgegeben & $\underline{j} = 0$

$$\underline{\nabla}\cdot\underline{B} \overset{(5.73)}{=} \mu_0 \underline{\nabla}\cdot(\underline{H}+\underline{M}) = 0 \quad \& \quad \underline{H} = -\underline{\nabla}\phi_M$$

$$\longrightarrow \boxed{\nabla^2\phi_M = -\rho_M \quad \text{mit } \rho_M = -\underline{\nabla}\cdot\underline{M}}$$

... effektive magnet. Ladungsdichte

Lösung:

(i) ohne Randflächen:

$$\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\underline{\nabla}'\cdot\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'} \qquad (5.71)$$

$\xrightarrow{\text{part. Integ}}$ & $\underline{\nabla}'\frac{1}{|\ldots|} = -\underline{\nabla}\frac{1}{|\ldots|}$

$$\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\cdot\int \frac{\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, d^3r'} \qquad (5.72)$$

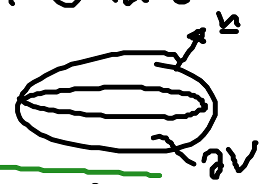
(ii) Fernfeldentwicklung: $\frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{r}$

$$\longrightarrow \boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\underline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\int \underline{M}(\underline{r}')\, d^3r' = \frac{1}{4\pi}\,\frac{\underline{m}\cdot\underline{r}}{r^3}} \qquad (5.73)$$

... Dipolfeld

(iii) $\underline{M}(\underline{r})$ mit Rand:

$\underline{M}(\underline{r}) \neq 0$ in V



(5.71) $\xrightarrow[\text{Übung!}]{\text{Beweis}}$

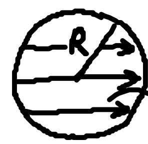
$$\boxed{\phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\underline{\nabla}'\cdot\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} + \frac{1}{4\pi}\oint_{\partial V} \frac{\underline{n}'\cdot\underline{M}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, df} \qquad (5.74)$$

NB: (1) $\sigma_M = \underline{n} \cdot \underline{M}$ ... effektive magnet. Flächenladungsdichte

(2) homogenes $\underline{M} \longrightarrow \phi_M = \phi_M[\sigma_M]$

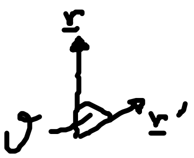
· **Beispiele:**

(i) homogen magnetisierte Kugel:



$\underline{M} = M_0 \underline{e}_z$

$$(5.72) \longrightarrow \phi_M(\underline{r}) = -\frac{1}{4\pi} \underline{M} \cdot \underline{\nabla} \int_{V_K} \frac{d^3r'}{|\underline{r} - \underline{r}'|}$$



$$= -\frac{1}{2} \underline{M} \cdot \underline{\nabla} \int_0^R \int_{-1}^{1} \frac{r'^2 dr' \, d\cos\vartheta}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\vartheta}}$$

$\vdots$

(1) Kugelinneres $(r < R)$:

$$\longrightarrow \phi_M(\underline{r}) = \frac{1}{3} \underline{M} \cdot \underline{r} \qquad (5.75)$$

$$\longrightarrow \underline{H}_{in} = -\underline{\nabla}\phi_M = -\frac{1}{3}\underline{M} \qquad (5.76)$$

$$\underline{B}_{in} = \mu_0(\underline{H}_{in} + \underline{M}) = \frac{2}{3}\mu_0 \underline{M}$$

NB: $\underline{H}_{in} \uparrow\downarrow \underline{M} \uparrow\uparrow \underline{B}_{in}$

(2) Kugeläußeres $(r > R)$:

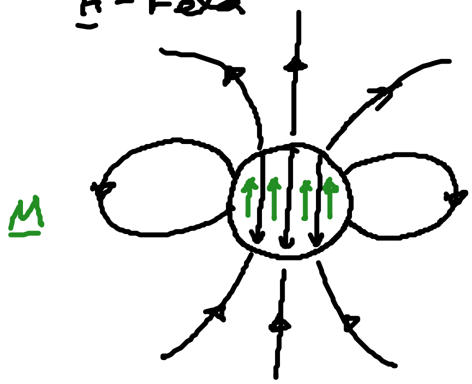
$$\longrightarrow \phi_M(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\underline{m} \cdot \underline{r}}{r^3} \qquad \text{mit } \underline{m} = \frac{4\pi}{3} R^3 \underline{M}$$

.... Dipolfeld

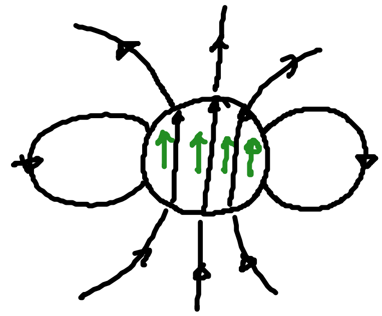
$$\longrightarrow \underline{H}_a = \frac{1}{\mu_0} \underline{B}_a = -\underline{\nabla}\phi_M$$

(3) Skizze:

$\underline{H}$-Feld



$\underline{B}$-Feld:



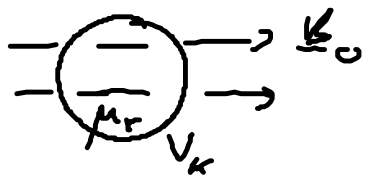
σ_M = Quelle von $\underline{H}$

$\longrightarrow$ Sprung am Kugelrand

$\underline{B}$ = reines Wirbelfeld ($\operatorname{div} \underline{B} = 0$)

= geschlossene Feldlinien!

(ii) magnetisierbare Kugel: in $\underline{B}_0$



$$\longrightarrow \quad \underline{M} = (\mu_r - 1)\, \underline{H}_{in} \qquad (5.77)$$

Annahme: homogen in V_K

Maxwell-Gl. linear

$\longrightarrow$ addiere $\underline{B}_0$ zu (5.76)

$$\longrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} \underline{B}_{in} &= \underline{B}_0 + \frac{2\mu_0}{3}\underline{M} \\ \underline{H}_{in} &= \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 \underbrace{- \frac{1}{3}\underline{M}}_{\text{„Entmagnetisierungsfeld"}} \end{aligned}} \qquad (5.78)$$

[vgl. Kap. 4.3.2: $\underline{E}_{in} = \underline{E}_0 - \frac{1}{3\varepsilon_0}\underline{P}$ (4.33)]

$$\xrightarrow{(5.77)} \quad \underline{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}_0 - \frac{\mu_r - 1}{3}\underline{H}_{in}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\longrightarrow \quad \underline{H}_{in} = \frac{1}{\mu_0}\,\frac{3}{\mu_r + 2}\,\underline{B}_0 \\ &\xrightarrow{\text{in } (5.77)} \quad \underline{M} = \frac{3}{\mu_0}\,\frac{\mu_r - 1}{\mu_r + 2}\,\underline{B}_0 \end{aligned}} \qquad (5.79)$$

5.6 Faradaysches Induktionsgesetz

• Bisher:

Magnetostatik: $\underline{B}, \underline{H}, \underline{j}$ } getrennt

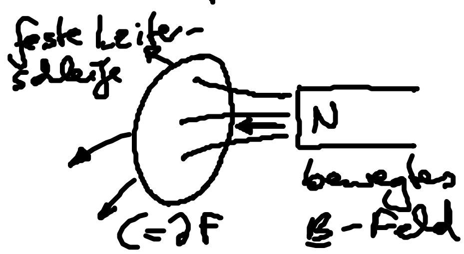
Elektro " : $\underline{E}, \underline{D}, \rho$

& Hinweis auf zeitabh. Phänomene: $\mathrm{rot}\,\underline{H} = \underline{j} + \frac{\partial \underline{D}}{\partial t}$

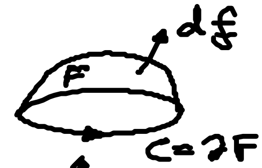
• Einschub: $\mathrm{rot}\,\underline{E} \longleftrightarrow \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$

5.6.1 Integrale & differentielle Formulierung

• 1. Grundexperiment: von Faraday



• 2 Größen:



Wegorientierung: Rechte-Hand-Regel

(i) magnetischer Fluß durch F:

$$\boxed{\Phi_B = \int_F \underline{B} \cdot d\underline{f}} \quad (5.80)$$

(ii) elektrische Ringspannung (Zirkulation) entlang $C = \partial F$:

(= elektromotorische Kraft (EMK))

$$\boxed{Z_E = \int_{C=\partial F} \underline{E} \cdot d\underline{r}} \quad (5.81)$$

NB: treibt Strom in Leiterschleife

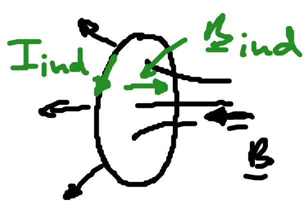
• integrale Formulierung:

$$\boxed{Z_E = -\frac{d}{dt}\Phi_B \longleftrightarrow \oint_{C=\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{r} = -\frac{d}{dt}\int \underline{B}\cdot d\underline{f}} \quad (5.82)$$

„Die zeitliche Änderung des magnet. Flusses durch eine Leiterschleife ruft eine Ringspannung und damit einen Strom hervor."

NB: 1. negatives Vorzeichen $\longleftrightarrow$ Lenzsche Regel

$\boxed{\text{„Das induzierte } \underline{E}\text{-Feld/der induzierte Strom erzeugt ein Magnetfeld, das der Ursache der magnet. Flußänderung entgegenwirkt"}}$ (5.83)



2. kein Vorfaktor: (5.82) führt auf Lorentzkraft (s.u.)

• differentielle Formulierung:

mit $\oint_{C=\partial F} \underline{E}\cdot d\underline{r} = \int_F \mathrm{rot}\,\underline{E}\cdot d\underline{f}$ & Gl. (5.82) & beliebiges F:

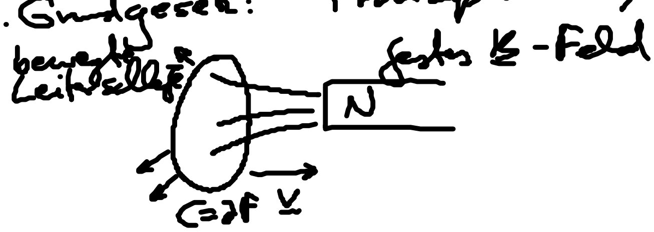
$$\longrightarrow \quad \boxed{\mathrm{rot}\,\underline{E} = -\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}} \quad (5.84)$$

„Die Wirbel von $\underline{E}$ sind durch $-\frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$ bestimmt"

5.6.2 Bewegter Leiter

• (5.84) sagt nichts über Leiter aus! $\longrightarrow$

2. Grundgesetz: Prinzip des Dynamos!



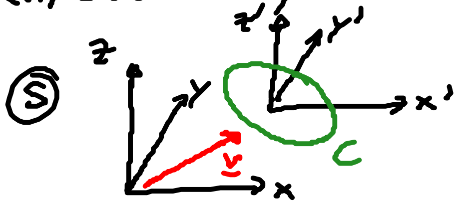
• Auswertung von (5.82):

(i) Ringspannung:

$$Z_E = \int_C \underline{E}' \cdot d\underline{r} \qquad (5.85)$$

mit $\underline{E}'$ ... elektr. Feld im Ruhesystem des Leiters

(ii) Inertialsysteme:



S... Laborsystem

S'... Ruhesystem Leiter

$$\underline{r}' = \underline{r} - \underline{v}t \qquad (5.86)$$

... Galileitransformation

„Physik soll in Inertialsystemen identisch sein"

(iii) magnetischer Fluß: Problem: $F = F(t)$

$$\frac{d}{dt}\Phi_B = \frac{d}{dt}\int_{F(t)} \underline{B}(\underline{r},t)\cdot d\underline{f}$$

$$\overset{(5.86)}{=} \frac{d}{dt}\int_{F(t)} \underline{B}(\underline{r}'+\underline{v}t, t)\cdot d\underline{f}$$

$$[\text{in } S'] \quad = \int_{\substack{F(t)\\ =F'}} \frac{d}{dt}\underline{B}(\underbrace{\underline{r}'+\underline{v}t}_{\underline{r}}, t)\cdot d\underline{f} = \int_{F(t)} \Big(\frac{\partial}{\partial t} + \underbrace{\underbrace{\frac{d\underline{r}}{dt}}_{\underline{v}}\cdot\underline{\nabla}_r\Big)\underline{B}}_{= -\underline{\nabla}\times(\underline{v}\times\underline{B}) + \underline{v}\underbrace{(\underline{\nabla}\cdot\underline{B})}_{=0}} \cdot d\underline{f}$$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt}\Phi_B = \int \Big[\frac{\partial}{\partial t} - \underline{\nabla}\times(\underline{v}\times\ )\Big]\underline{B}\cdot d\underline{f}$$

$$\overset{\text{Stokes}}{=} \int_F \frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\cdot d\underline{f} - \int_{C=\partial F} (\underline{v}\times\underline{B})\cdot d\underline{r} \qquad (5.86)$$

(iv) Transformation von elektr. Feld: $Z_E = -\frac{d}{dt}\Phi_B$

$$\xrightarrow{(5.85)\ \&\ (5.86)} \int_{C=\partial F} (\underline{E}' - \underline{v}\times\underline{B})\cdot d\underline{r} = -\int_F \frac{\partial}{\partial t}\underline{B}\cdot d\underline{f}$$

$\Longrightarrow$ elektr. Feld im Laborsystem: $\boxed{\underline{E} = \underline{E}' - \underline{v} \times \underline{B}}$ (5.87)

„Beweis": Lorentzkraft auf Ladung q im Leiter:

$\underline{F} = q\,\underline{E}'$ .... in S' ruht q

$= q(\underbrace{\underline{E} + \underline{v} \times \underline{B}}_{\underline{E}'})$ ... in S bewegt sich q

qed

NB: Gl. (5.87) = Galilei-Transformationsgesetz für $\underline{E}$!
gültig für $v \ll c$, sonst Lorentz-Trafo!