

8.3 Dynamische Theorie der Dielektrizitätskonstanten

• Frequenzabhängigkeit: $\epsilon = \epsilon(\omega)$... Dispersion
dispersives Material

Auswirkungen:

(1) Phasengeschw. $\bar{c}(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r(\omega)}}$

→ Wellenpakete zerlaufen

(2) $\text{Im } \epsilon(\omega) \neq 0 \leftrightarrow$ Absorption von Energie

(3) komplexes $\epsilon(\omega) = \epsilon'(\omega) + i\epsilon''(\omega)$

formaler Zusammenhang $\epsilon'(\omega) \leftrightarrow \epsilon''(\omega)$

→ Kramers-Kronig-Relation
(Kap. 8.3.3)

• Theoriemodelle für $\epsilon(\omega)$:

(1) Kap. 8.3.1 gebundene Elektronen

(2) " 8.3.2 freie (Leitungs-) Elektronen

• grobe Einordnung:

(i) Wiederholung: Kap. 4.2

$$\underline{D} = \epsilon \underline{E} = \epsilon_0 \underline{E} + \underline{P} = \epsilon_0 \underbrace{(1+\chi)}_{\epsilon_r} \underline{E} \quad (8.38)$$

atomarer/molekularer Ursprung von χ :

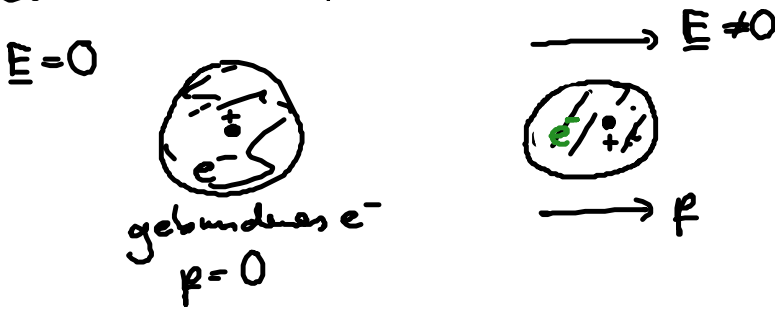
Dipolmoment: $\underline{p} = \epsilon_0 \alpha \underline{E} \rightarrow \underline{P} = N \underline{p} = \epsilon_0 \underbrace{N\alpha}_{\chi} \underline{E} \quad (8.39)$
↑ Polarisierbarkeit ↑ Dichte

NB: in dichten Systemen: $\chi = \frac{N\alpha}{1 - \frac{1}{3}N\alpha} \quad (4.37)$

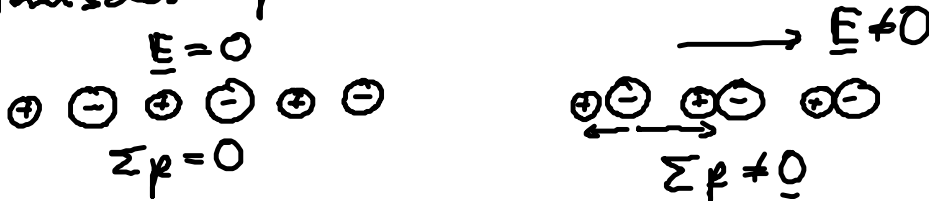
wegen $\underline{E}_{loc} \neq \underline{E}$

(ii) Arten von Polarisierbarkeit:

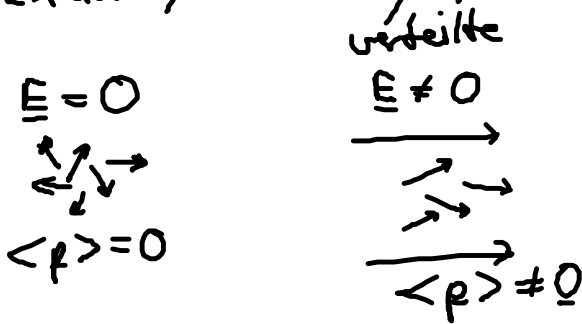
(1) elektronisches Dipolmoment: Verschiebungspolarisation



(2) ionisches Dipolmoment: im Ionenkristall (NaCl)

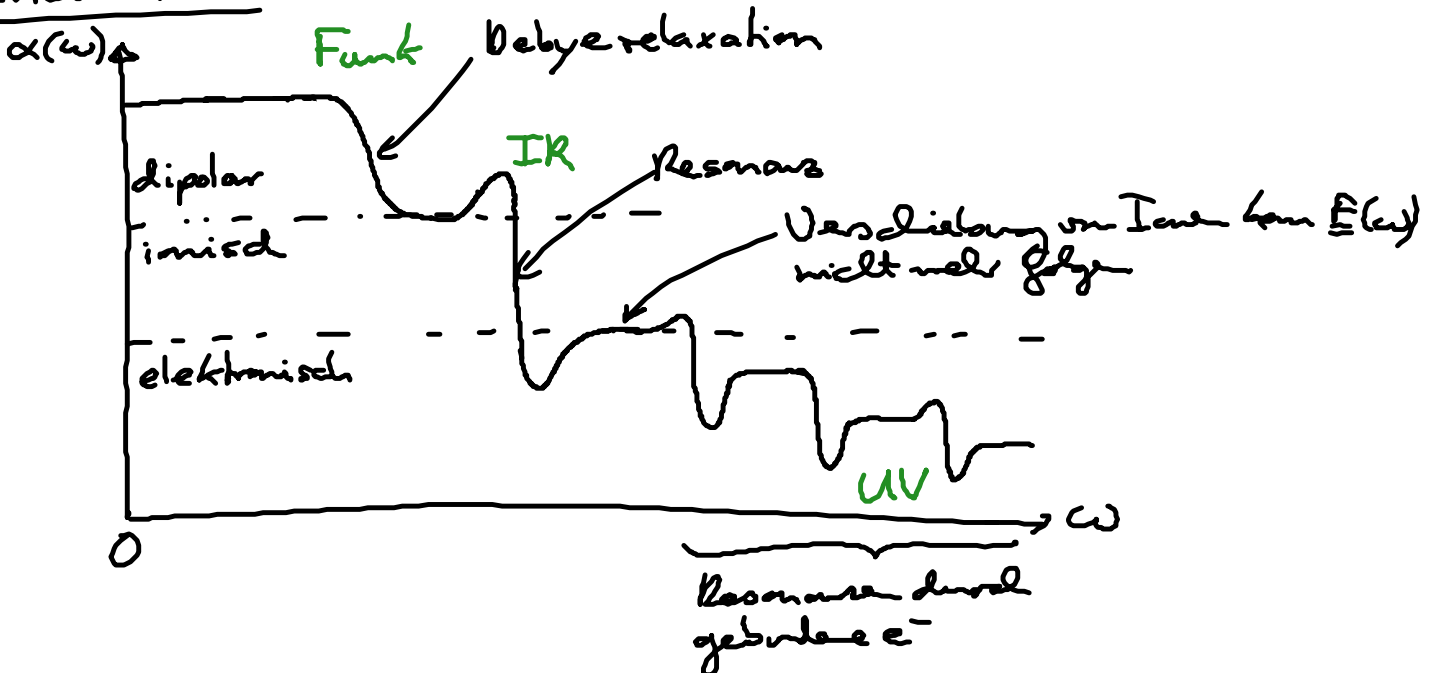


(3) Orientierungspolarisation: molekulare, statistisch verteilte Dipole (in Flüssigkeiten)



→ Beiträge zu $\alpha(\omega)$ im Frequenzraum:

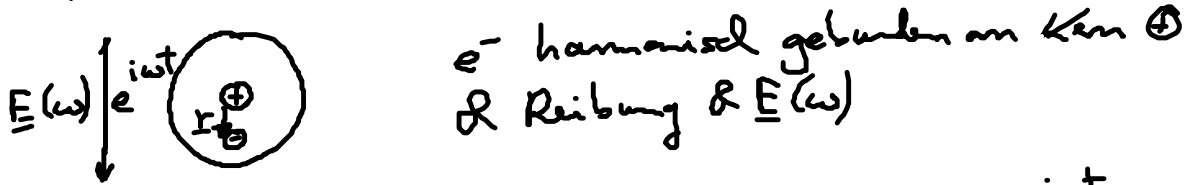
schematisch



- Idee: · verschiedene Leitungen haben verschiedene
 Drift. Frequenz ω_c mit: $\omega_0 < \omega_I < \omega_e$
 · $\omega \gg \omega_c$: kein Leitungsmodell ↑ Orientierung

8.2.1 Lorentzmodell für gebundene Elektronen

- Klassisches Oszillatormodell:



$$\rightarrow m (\ddot{\underline{r}} + \gamma \dot{\underline{r}} + \omega_0^2 \underline{r}) = -e \underline{E}(\omega) e^{-i\omega t} \quad (8.40)$$

↙ Dämpfungskoeffizient
↖ Eigenfrequenz

- Lösung:

Ansatz: $\underline{r}(t) = \underline{r}(\omega) e^{-i\omega t}$ in (8.40) $\rightarrow \underline{r}(\omega)$

\rightarrow Dipolmoment: $\underline{p}(t) = \underline{p}(\omega) e^{-i\omega t} = -e \underbrace{\underline{r}(\omega) e^{-i\omega t}}_{\underline{r}(t)} \quad (8.41)$

$$\rightarrow \underline{p}(\omega) = -e \underline{r}(\omega) = \underbrace{\frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma}}_{\epsilon_0 \alpha(\omega)} \underline{E}(\omega) \quad (8.42)$$

- Verallgemeinerung:

$f_i e^-$ mit ω_i, γ_i

\rightarrow relative Permeabilität

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{N \alpha(\omega)}{\chi(\omega)} = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2 - \omega^2 - i\omega\gamma_i} \quad (8.43)$$

... Drudesche Formel

- NB. (1) f_i ... Oszillatorstärke, $\sum_i f_i = Z$... Kernladungszahl
 (2) ω_i, γ_i, f_i sind über QM definierbar!

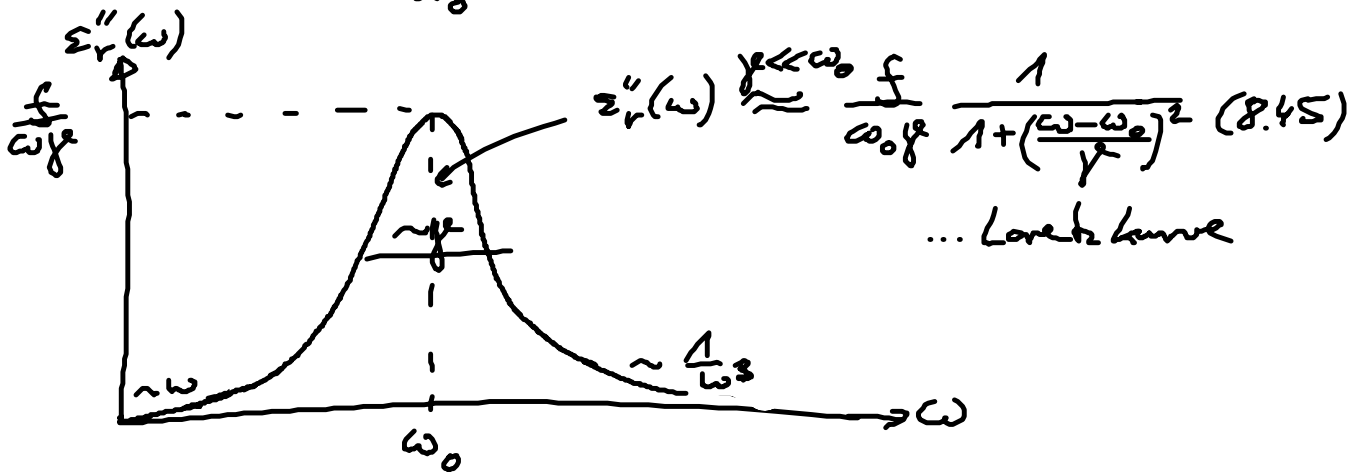
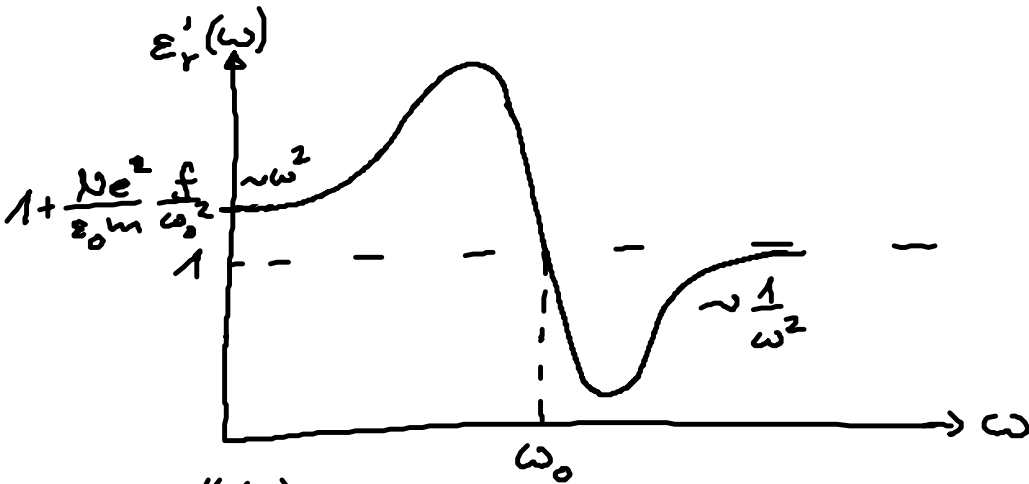
• Diskussion:

$$\epsilon_r(\omega) = \epsilon_r'(\omega) + i \epsilon_r''(\omega)$$

$$\text{mit } \epsilon_r'(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i f_i \frac{\omega_i^2 - \omega^2}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_i^2} \quad (8.44)$$

$$\epsilon_r''(\omega) = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i f_i \frac{\omega \gamma_i}{(\omega_i^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 \gamma_i^2}$$

Siehe: für ein $\omega_i = \omega_0$, $\gamma_i = \gamma$, $f_i = f$
 typischerweise $\gamma_i \ll \omega_i$



NB. (1) bei ω_0 : $\epsilon'(\omega)$ zeigt Resonanz
 $\epsilon''(\omega)$ " Resonanzabsorption
 sonst \approx null
 Kap. 6.3.1: $\epsilon''(\omega)$ beschreibt dissipierte Energie

(2) normale Dispersion: $\frac{d\epsilon'(\omega)}{d\omega} > 0$
 anomale " $\frac{d\epsilon'(\omega)}{d\omega} < 0$

(3) Nicht frequenzunabhängig: $\omega_i \neq 0$

$$\epsilon_r(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m} \sum_i \frac{f_i}{\omega_i^2} + O(\omega^2) \quad (8.46)$$

(4) Hochfrequenzlimit: $\omega \gg \omega_i$

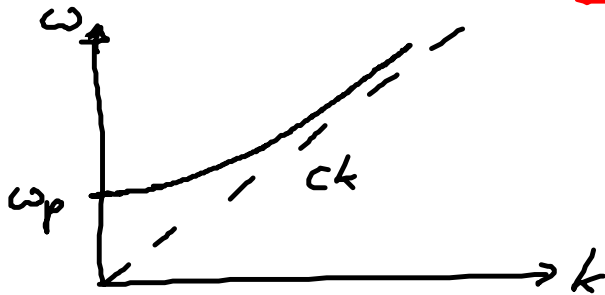
$$\epsilon_r(\omega) \approx 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad \omega_p^2 = \frac{ZNe^2}{\epsilon_0 m} \quad (8.47)$$

$$\sum_i f_i = Z!$$

... Plasmafrequenz

Dispersionsrelation für eine Welle: $\bar{n} = \sqrt{\epsilon_r}$

$$kc = \omega \bar{n} = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \longrightarrow \omega = \pm \sqrt{\omega_p^2 + c^2 k^2} \quad (8.48)$$



(i) dielektr. Medium: (8.47) gilt für $\omega \gg \omega_p$

(ii) Elektronenplasma geringe Dichte:

(8.47) gilt auch für $\omega < \omega_p \rightarrow \epsilon_r(\omega) < 0$

$$\longrightarrow k = \frac{\omega}{c} \bar{n} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_r} = i \gamma^{-1} \quad (8.49)$$

... eine Welle
rein gedämpft

(iii) ebenso: Leitzelekttronen von Metallen:

$$\omega_p^2 = \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m^*}$$

effektive e^- -Masse im Leitungsband

$\omega < \omega_p$: Metall reflektiert!

$\omega > \omega_p$: " durchlässig
im UV

• Zusammenfassung: Wellenausbreitung

komplexe Wellenzahl: $k = \frac{\omega}{c} \bar{n}$

" Brechungsindex: $\bar{n} = \sqrt{\epsilon_r} = n(\omega) + i\kappa(\omega)$ (8.51)

mit $\left. \begin{array}{l} \epsilon_r' = n^2 - \kappa^2 \\ \epsilon_r'' = 2\kappa n \end{array} \right\} \leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} n^2 = \frac{1}{2}(\epsilon_r' + \sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2}) \\ \kappa^2 = -\frac{1}{2}(\epsilon_r' - \sqrt{\epsilon_r'^2 + \epsilon_r''^2}) \end{array} \right.$

insbes.: $n(\omega) = \sqrt{\epsilon_r'}$ für $\epsilon_r'' = 0$

Bsp. H_2O [\rightarrow Folie]