9.1 Die retardierten Potentiale

$$\Box A^\alpha = -\mu_0 j^\alpha \longrightarrow \boxed{A^\alpha(\underline{r},t) = \int d^3r\, dt'\, G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')(-\mu_0)\, j^\alpha(\underline{r}',t')} \quad (9.1)$$

mit $\boxed{\Box G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = \delta(\underline{r}-\underline{r}', t-t')}$ (9.3)

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = 0 \text{ für } t-t'<0\,! \quad (9.2)$$

• Berechnung von G:

(i) Lösung im Fourier-Raum:

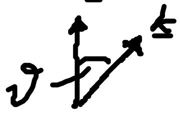
$$\boxed{G(\underline{k},\omega) = \frac{1}{\frac{\omega^2}{c^2}-k^2}} \quad (9.4)$$

(ii) ...

(iii) zeitliche Fouriertrafo: $\longrightarrow$ $G(\underline{k},t) = -\frac{c}{k}\sin(ckt)\,,\ t>0$ (9.8)

(iv) räumliche Fouriertrafo:

$$G(\underline{r},t) = \int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\, G(\underline{k},t)\, e^{i\underline{k}\cdot\underline{r}} = -c\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{k}\sin(ckt)\, e^{i\underbrace{\underline{k}\cdot\underline{r}}_{kr\cos\vartheta}}$$

in Polarkoord.: 

& $d^3k = k^2\,dk\,d\cos\vartheta\,d\varphi$

& $\int\frac{d\varphi}{2\pi}1 = 1$

$$\longrightarrow G(\underline{r},t) = -c\frac{\cancel{2\pi}}{(2\pi)^2}\int_0^\infty dk\,\frac{k^{\cancel{2}}}{\cancel{k}}\sin ckt\underbrace{\int_{-1}^{1}d\cos\vartheta\, e^{ikr\cos\vartheta}}_{2\frac{1}{i\cancel{k}r}(e^{ikr}-e^{-ikr})}$$

$$\longrightarrow G(\underline{r},t) = -\frac{c}{2\pi^2 r}\int_0^\infty dk\,\underbrace{\sin(ckt)\,\sin(kr)}_{\text{gerade in } k}$$

$$= -\frac{c}{4\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\frac{1}{2i}\left(e^{ickt}-e^{-ickt}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right)$$

$$= \frac{c}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{\infty}dk\,\left[e^{ik(r+ct)}-e^{ik(r-ct)}\right]$$

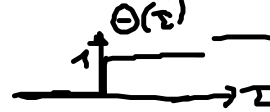
$$\longrightarrow G(\underline{r},t) = \frac{\cancel{c}}{4\pi r}\left[\underbrace{\delta(r+ct)}_{=0,\ t>0} - \underbrace{\delta(r-ct)}_{\frac{1}{c}\delta\left(\frac{r}{c}-t\right) = \frac{1}{\cancel{c}}\delta\left(t-\frac{r}{c}\right)}\right]$$

$r \to |\underline{r}-\underline{r}'|$ $\longrightarrow$ $t \to t-t'$

$$\boxed{G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\,\Theta(t-t')\,\frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)}$$

$$\text{mit } \Theta(t-t') = \begin{cases} 1, & t \geq t' \\ 0, & t < t' \end{cases} \quad \text{... Stufe Fkt}$$

$\Theta(\tau)$



... kausale/retardierte Greensche Fkt.

<u>NB</u>: avancierte Greensche Fkt.: $G \sim \delta(r+ct)$!

$\longrightarrow$ „Zukunft bedingt Gegenwart"

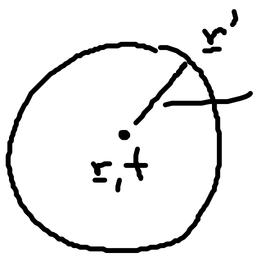
· Zeitintegration: in (9.1)

$$\longrightarrow A^\alpha(\underline{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{\infty} dt'\; G(\underline{r}-\underline{r}', t-t')\,(-\mu_0)\, j^\alpha(\underline{r}',t')$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int d^3r' \int_{-\infty}^{t} dt'\; \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\,\delta\!\left(t-t'-\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)\mu_0\, j^\alpha(\underline{r}',t')$$

$$\longrightarrow \boxed{A^\alpha(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{j^\alpha(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}} \quad (9.10)$$

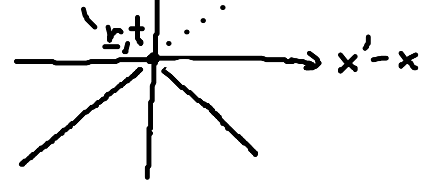
$$\text{mit } t_r = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \quad \text{... retardierte Zeit}$$



.... nur Ladung/Ströme bei $\underline{r}'$ zur Zeit t' tragen zu $A^\alpha(\underline{r},t)$ bei, deren Wirkung in Zeit $\frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}$ den Ort $\underline{r}$ erreicht

$\longleftrightarrow$ Wirkung breitet sich mit c aus!

$\longleftrightarrow$ Ursache liegen <u>auf</u> Rückwärts-Lichtkegel von $\underline{r}$ $\quad c(t'-t)$



- retardierte Potentiale: $A^\alpha \to \varphi, \underline{A}$, $j^\alpha \to \rho, \underline{j}$

$$\boxed{\begin{aligned} \varphi(\underline{r},t) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int d^3r' \, \frac{\rho(\underline{r}', t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \\ \underline{A}(\underline{r},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}', t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \end{aligned}} \qquad (9.11)$$

$$\longrightarrow \quad \boxed{\underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}\,, \quad \underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t}} \qquad (9.12)$$

$\longrightarrow$ allg. Lsg. der Maxwell-Gln.

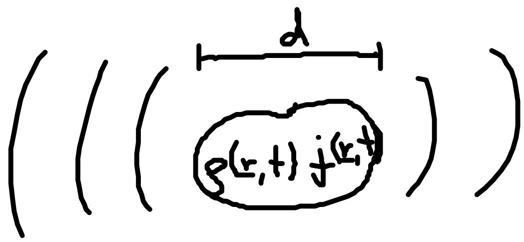
9.2 Felder & Strahlung eines oszillierenden elektr. Dipols

- Ziel: Abstrahlung von em Wellen eines elektr. Dipols = elektr. Hertzscher Dipol
  - $\longrightarrow$ Radiowellen
  - $\longrightarrow$ Lichtstreuung

9.2.1 Allgemeine Problemstellung

- lokalisierte, oszillierende Quellen:

(i)



$$\left.\begin{matrix} \underline{A}(\underline{r},t) \\ \varphi(\underline{r},t) \end{matrix}\right\} \longrightarrow \left\{\begin{matrix} \underline{E}(\underline{r},t) \\ \underline{B}(\underline{r},t) \end{matrix}\right.$$

außerhalb Quellen

(ii)
(9.13)
$$\left.\begin{aligned} \rho(\underline{r},t) &= \rho(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \\ \underline{j}(\underline{r},t) &= \underline{j}(\underline{r})\, e^{-i\omega t} \end{aligned}\right\}$$ verknüpft über $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \underline{j} = 0$

$$\longleftrightarrow \quad \boxed{-i\omega\rho(\underline{r}) + \operatorname{div}\underline{j}(\underline{r}) = 0} \qquad (9.14)$$

$\longrightarrow$ Beschränkung auf

$$\underline{A}(\underline{r},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}',t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}'|}, \quad t_r = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c} \qquad (9.11)$$

- oszillierendes $\underline{A}(\underline{r},t) = \underline{A}(\underline{r})\underbrace{e^{-i\omega t}}$

(1) wegen $\underline{j}(\underline{r}',t_r) \overset{(9.13)}{=} \underline{j}(\underline{r})e^{-i\omega t_r} \overset{(9.11)}{=} \underline{j}(\underline{r}')\underbrace{e^{-i\omega t}}\, e^{+i\underbrace{\frac{\omega}{c}}_{k}|\underline{r}-\underline{r}'|}$

(2) also:

$$(9.11) \qquad \boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|}\, e^{ik|\underline{r}-\underline{r}'|}} \qquad (9.15)$$

ebenso: $\begin{pmatrix}\underline{E}(\underline{r},t)\\ \underline{B}(\underline{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\underline{E}(\underline{r})\\ \underline{B}(\underline{r})\end{pmatrix} e^{-i\omega t}$ mit

$$\boxed{\underline{B}(\underline{r}) = \underline{\nabla}\times\underline{A}(\underline{r}) \longrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = i\frac{c}{k}\underline{\nabla}\times\underline{B}} \qquad (9.16)$$

außerhalb Quellen

$$\underline{\nabla}\times\underline{B} = -\frac{i\omega}{c^2}\underline{E}(\underline{r}) = -i\frac{k}{c}\underline{E}(\underline{r})$$

- Diskussion von (9.15): nach Raumgebieten, $\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi c}{\omega}}$

sei $d \ll \lambda$

(i) Nahzone: $d < r \ll \lambda$

$$\xrightarrow{\text{in (9.15)}} k|\underline{r}-\underline{r}'| \ll 1 \longrightarrow \underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int d^3r' \, \frac{\underline{j}(\underline{r}')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \qquad (5.19)$$

... Nahfelder sind quasistationär!
(5.19) aus Magnetostatik

(ii) Zwischenzone: $d \ll r \approx \lambda$

komplexes Verhalten

(iii) Fernzone: $d \ll \lambda \ll r$

$$\text{in (9.15)} \quad \left.\begin{aligned} &(1)\ \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \approx \frac{1}{r} \\ &(2)\ |\underline{r}-\underline{r}'| \approx r - \underline{e}_r\cdot\underline{r}' \quad \text{mit } \underline{e}_r = \frac{\underline{r}}{r} \end{aligned}\right\} \text{ in (9.15)}$$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int d^3r'\,\underline{j}(\underline{r}')\,\underbrace{e^{-ik\,\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}}_{\underset{d\ll\lambda}{\approx} 1 - ik\,\underline{e}_r\cdot\underline{r}'}} \quad (9.17)$$

auslaufende Kugelwelle!

$\longrightarrow$ Strommomente!

<u>NB</u>: Ausdruck für Fernzone gilt <u>immer</u> für punktförmige Stromverteilungen: $\underline{j}(\underline{r}) \sim \delta(\underline{r})$ & Momente

- statt systematischer Multipolentwicklung für (9.15), nun ...

9.2.2 <u>Elektrischer Hertzscher Dipol</u>

- erster Term in (9.17) $\longleftrightarrow$ elektr. Dipol

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{e^{ikr}}{r}\int \underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' \quad (9.18)$$

- Hertzscher elektr. Dipol:

$$\int \underline{j}(\underline{r}')\,d^3r' = \int \underbrace{\underline{j}(\underline{r}')\cdot\underline{\nabla}'}_{j_i\nabla_i}\,\underline{r}'\,d^3r' \underset{\text{part. Integ.}}{=\!=} -\int \underline{r}'\,\underline{\nabla}\cdot\underline{j}(\underline{r}')\,d^3r'$$

$$(-i\omega\rho + \operatorname{div} j = 0) \longrightarrow \text{Kont.gl.} \overset{(9.14)}{=} -i\omega\int \underline{r}'\rho(\underline{r}')\,d^3r'$$

$$\boxed{\int \underline{j}(\underline{r})\,d^3r = -i\omega\,\underline{p} = -i\omega\int \underline{r}\,\rho(\underline{r})\,d^3r} \quad (9.19)$$

... elektr. Dipolmoment der oszillierenden Stromverteilung

$$\longrightarrow \boxed{\underline{A}(\underline{r}) = -i\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\,\underline{p}\,\frac{e^{ikr}}{r}} \quad (9.20)$$

NB: (9.20) ist exakt für Punktdipol mit Polarisation $P(\underline{r},t) = \underline{p}\,\delta(\underline{r})\,e^{-i\omega t}$

• em Feld: (9.16) & $\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{B}$

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0}\underline{\nabla}\times\underline{A} \longrightarrow \underline{H}(\underline{r}) = \frac{c}{4\pi}k^2\frac{e^{ikr}}{r}\left(1-\frac{1}{ikr}\right)\underline{e}_r\times p$$

$$\underline{E} = i\frac{c}{k}\underline{\nabla}\times\mu_0\underline{H} \longrightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{ikr}}{r}\Big[k^2(\underline{e}_r\times p)\times\underline{e}_r + \frac{1}{r^2}(1-ikr)\,\times$$

$$\times\big(3(p\cdot\underline{e}_r)\underline{e}_r - p\big)\Big] \quad (9.21)$$