

9.2.2 Elektrischer Hertz'scher Dipol

$$\underline{A}(\underline{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{e^{ikr}}{r} \int \underline{j}(\underline{r}') d^3r' \quad (9.18)$$

$$\text{mit } \int \underline{j}(\underline{r}) d^3r = -i\omega \underline{p} = -i\omega \int \underline{r} \rho(\underline{r}) d^3r \quad (9.19)$$

$$\rightarrow \underline{A}(\underline{r}) = -i\omega \frac{\mu_0}{4\pi} \underline{p} \frac{e^{ikr}}{r} \quad (9.20)$$

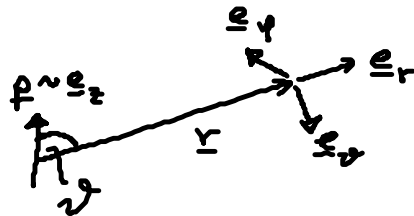
• am-Feld:

$$\underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \underline{A} \rightarrow \underline{H}(\underline{r}) = \frac{c}{4\pi} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr}\right) \underline{e}_r \times \underline{p} \quad (9.21)$$

$$\underline{E} = i \frac{c}{k} \nabla \times \mu_0 \underline{H} \rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^{ikr}}{r} \left[k^2 (\underline{e}_r \times \underline{p}) \times \underline{e}_r + \frac{1}{r^2} (1 - ikr) (3(\underline{p} \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r - \underline{p}) \right]$$

Diskussion:

(i) $\underline{H} \sim \underline{e}_r \times \underline{p} \perp$ Ebene $(\underline{p}, \underline{e}_r)$
 = Azimthalnähe \underline{e}_φ



\underline{E} in Ebene $(\underline{p}, \underline{e}_r)$

(ii) Nahzone: $r \ll \lambda \rightarrow kr \ll 1 \rightarrow e^{ikr} \approx 1$

$$\rightarrow \underline{E}(\underline{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^3} [3(\underline{p} \cdot \underline{e}_r) \underline{e}_r - \underline{p}] \quad (9.22)$$

$$\rightarrow \underline{H}(\underline{r}) = i \frac{c}{4\pi} \frac{kr}{r^3} \underline{e}_r \times \underline{p}$$

NB: (1) $|\underline{H}| \sim kr |\underline{E}| \ll |\underline{E}|$
 im Nahfeld dominiert das „statische“ elektr. Dipolfeld
 (2) Faktor $i \rightarrow$ Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ von \underline{H} gegen \underline{E}

(iii) Fernzone: $\frac{1}{r}$ dominiert

$$\rightarrow \underline{H}(\underline{r}) = \frac{c}{4\pi} k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \underline{e}_r \times \underline{p} \sim \underline{e}_\varphi \quad (9.32)$$

$$\underline{E}(\underline{r}) = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \underline{H}(\underline{r}) \times \underline{e}_r$$

NB: (1) $\underline{H}, \underline{E} \sim \frac{e^{ikr}}{r} \leftrightarrow$ auslaufende Kugelwelle

(2) $\underline{H}, \underline{E} \sim \frac{1}{r} \leftrightarrow$ Abstrahlung von Energie!

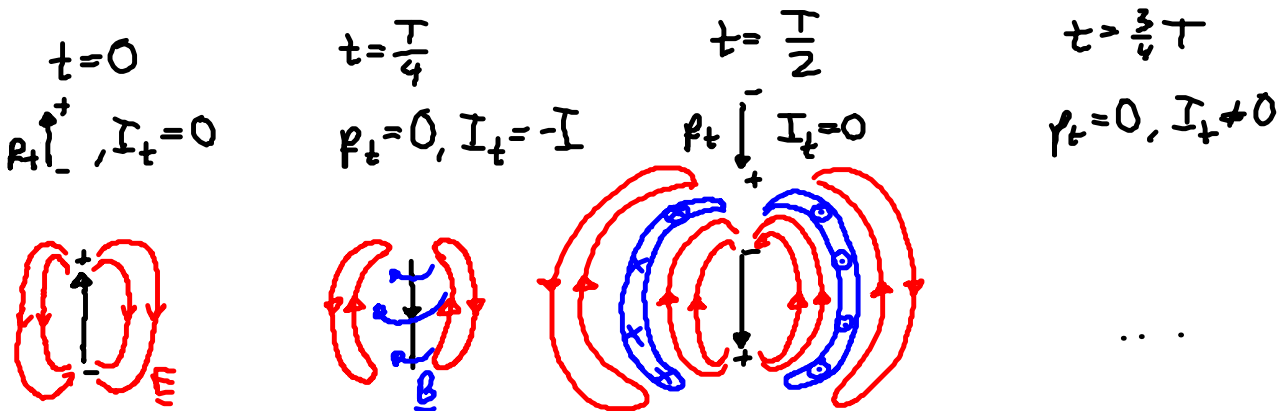
(3) $\underline{H}, \underline{E}$ in Phase!

(iv) Skizze: $\underline{E}_R = \text{Re}(\underline{E} e^{-i\omega t}) \sim \cos(kr - \omega t) \dots$ Fernfeld
 $\underline{H}_R = \text{Re}(\underline{H} e^{-i\omega t}) \sim \begin{cases} \sin \omega t & \dots \text{ Nahfeld} \\ \cos(kr - \omega t) & \dots \text{ Fernfeld} \end{cases}$

$p_t = p \cos \omega t \leftrightarrow$ Strom $I_t = -I \sin \omega t$

$\int p \leftrightarrow I_t = 0$

Periode: $T = \frac{2\pi}{\omega}$



„statisches“
Dipolfeld

\underline{E} -Feld-Wulst
löst sich ab

\underline{H} -Feld-Wulst
löst sich ab

s. Animation [Wikipedia, Antennar bipol]

auslaufende \underline{E} -Feld-Welle

Poyntingvektor $\sim \underline{e}_r$

• Strahlungsleistung: für Fernfeld!

(i) Poyntingvektor:

$$\underline{S}(\underline{r}, t) = \underline{E}_R \times \underline{H}_R = \frac{c^2}{(4\pi)^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} p^2 k^4 \sin^2 \vartheta \frac{\cos^2(kr - \omega t)}{r^2} \underline{e}_r \quad (9.34)$$

$$\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (\underline{H}_R \times \underline{e}_r) \times \underline{H}_R = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} |\underline{H}_R|^2 \underline{e}_r \quad \& \quad |\underline{e}_r \times \underline{p}| = p \sin \vartheta$$

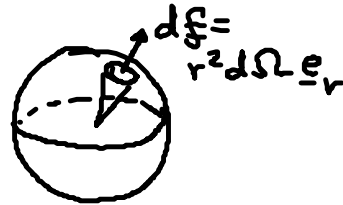
$\sim \underline{E}_R$ $\underline{e}_r \cdot \underline{H}_R = 0$ $\begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \underline{p} \\ \underline{e}_r \end{matrix}$

NB: $\underline{S} \sim \underline{e}_r$!

(ii) abgestrahlte mittlere Leistung pro Raumwinkelelement $d\Omega$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{1}{T} \int_0^T |\underline{S} \cdot \underbrace{d\underline{f}}_{\underline{r}^2 d\Omega}| dt = \frac{c^2}{32\pi^2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} p^2 k^4 \sin^2 \vartheta$$

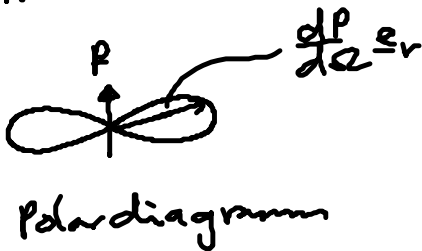
$\frac{1}{T} \int \cos^2 \dots = \frac{1}{2}$ (9.35)



NB: (1) $\frac{dP}{d\Omega}$ unabhängig von r

→ Abstrahlung ins Unendliche!

(2) Abstrahlcharakteristik:



$$\frac{dP}{d\Omega} = 0, \quad \underline{e}_r \parallel \underline{p}$$

$$\frac{dP}{d\Omega} = \text{max}, \quad \underline{e}_r \perp \underline{p}$$

(3) $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}$... Wellenwiderstand des Vakuums

(iii) gesamte abgestrahlte Leistung:

$$P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{c^2}{12\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} p^2 k^4 \quad (3.36)$$

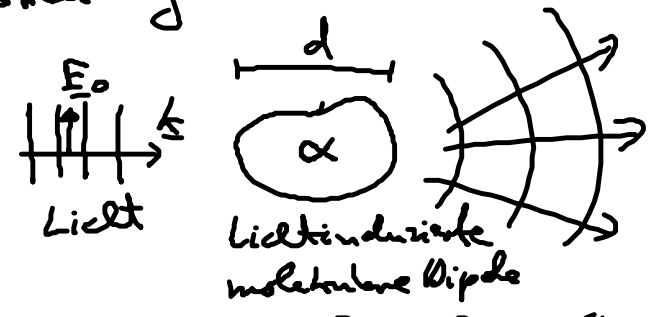
$$\int d\Omega \frac{\sin^2 \vartheta}{1 - \cos^2 \vartheta} = \frac{8\pi}{3}$$

NB: $P \sim p^2 k^4 \sim p^2 \omega^4$

→ Dipole strahlen stärker im Blauen!

800 nm → 400 nm $\hat{=}$ Faktor 16
IR UV

• Rayleighstreuung:



Abstrahlung als Hertz'sche Dipole = Lichtstreuung

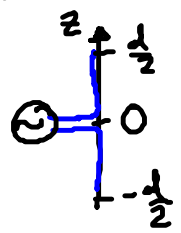
$$p = \alpha E = \alpha E_0 \cos(kr - \omega t)$$

$$\frac{dP}{d\Omega} \sim \alpha^2 E_0^2 \omega^4 \sin^2 \vartheta \quad (3.37)$$

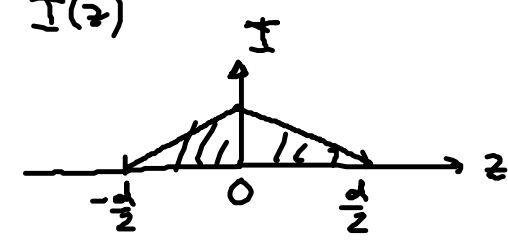
(i) Sonnenstrahlen streuen an Luftmolekülen → blauer Himmel

(ii) Abendrot: „dunkelgelbes Licht hat an „blauer“ Intensität verloren“

• kurze Stabantenne:



$$(1) j(x) = I_0 \underbrace{\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)}_{I(z)} \delta(x) \delta(y) \Theta\left(\frac{d}{2} - |z|\right) \delta_z$$



(2) (9.15)

$$-i\omega \underline{p} = \int d^3r \underline{j}(\underline{r}) = \underline{e}_z \int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}} I(z) dz = \frac{I_0 d}{2} \underline{e}_z$$

$\omega = ck \rightarrow$

$$\underline{p} = i \frac{I_0 d}{2kc} \underline{e}_z \quad (9.38)$$

(3) gesamte abgestrahlte Leistung: $kd \ll 1!$

(9.36) mit $\underline{p} \rightarrow$

$$P = \frac{1}{48\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} I_0^2 (kd)^2 \quad (9.39)$$

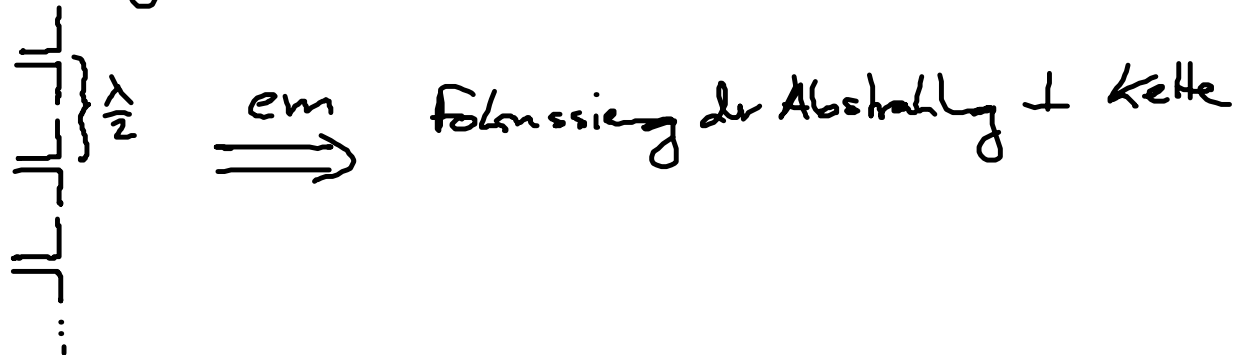
(4) Strahlungs-widerstand:

$$P = \frac{I_0^2}{2} R_s \quad \text{mit} \quad R_s = \frac{1}{24\pi} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} (kd)^2$$

$R_s \dots$ Widerstand, der abgestrahlter Leistung (= Verlust) entspricht

(5) höhere Multipole: wenn $kd \sim O(1)$

(6) Anordng von Antennen.



• magnetischer Hertzischer Dipol:

$$\underline{m} = \frac{1}{2} \int \underline{r} \times \underline{j}(\underline{r}) d^3r$$

... magnet Moment

Bsp:

$$I(t) = I_0 e^{-i\omega t}$$

$\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{H}}$ folgen aus den Feldern des elektr. Dipols
durch folgende Ersetzung in (9.21):

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{p}} \rightarrow \frac{\underline{\underline{m}}}{c} \\ \underline{\underline{E}} \rightarrow z_0 \underline{\underline{H}} \\ z_0 \underline{\underline{H}} \rightarrow -\underline{\underline{E}} \end{array}, \quad z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \quad (9.41)$$

ohne Beweis!