

## 9.3 Lienard-Wiechert-Potenziale

= retardierte Potentiale für bewegte Punktladung

- Anwendung: - Bremsstrahlung  
- Synchrotronstrahlung

• bewegte Punktladung  $q$ :

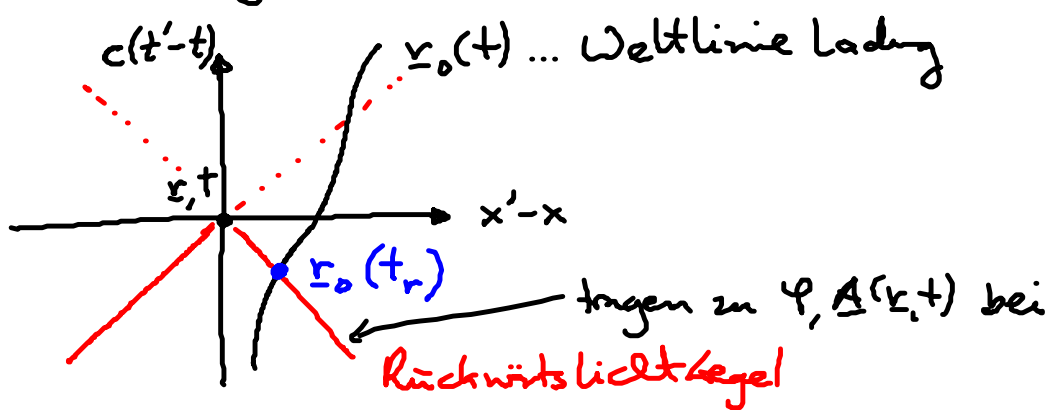
Teilchenbahn:  $\underline{r}_0(t) \rightarrow$  Geschw.:  $\underline{v}(t) = \frac{d}{dt} \underline{r}_0(t)$

Ladungsdichte:  $\rho(\underline{r}, t) = q \delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t))$  (9.32)

Stromdichte:  $\underline{j}(\underline{r}, t) = q \underline{v}(t) \delta(\underline{r} - \underline{r}_0(t))$

### 9.3.1 Herleitung

• Verdientlichg:  $\varphi(\underline{r}, t), \underline{A}(\underline{r}, t)$ ?



$$t_r = t - \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_r)|}{c} \quad (9.33)$$

... retardierte Zeit

retardierte Potentiale:

mit Greenscher Fkt. aus Gl. (9.9):

$$G(\underline{r}-\underline{r}', t-t') = -\Theta(t-t') \frac{1}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \delta\left(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \varphi(\underline{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int d^3r' dt' \frac{\rho(\underline{r}', t')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \delta\left(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \\ \underline{A}(\underline{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int d^3r' dt' \frac{\underline{j}(\underline{r}', t')}{|\underline{r}-\underline{r}'|} \delta\left(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}'|}{c}\right) \end{aligned} \quad (9.34)$$

Gang der Herleitung:

(i) Idee: zuerst Integ. über Raum:

$$\rho \xrightarrow[\underline{r}' \rightarrow \underline{r}_0(t')]{\text{aus (9.32) in (9.34)}} \varphi(\underline{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int dt' \frac{\delta\left(t-t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|} \quad (9.35)$$

Achtg:  $t'$  auch in  $r_0(t')$ !

(ii) Hilfsatz: (9.36)

$$\delta(f(t)) = \sum_i \frac{\delta(t-t_i)}{\left|\frac{df}{dt}\right|_{t=t_i}}, \quad t_i \dots \text{Nullstellen von } f(t_i)$$

Beweis: eine einfache Nullstelle:

$$f(t_i) = 0 \rightarrow \delta(f(t)) \stackrel{\text{Taylor}}{=} \delta\left(\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_i} (t-t_i)\right) = \frac{1}{\left|\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=t_i}\right|} \delta(t-t_i) \quad \text{qed}$$

(iii) also:  $f(t') = t - t' - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c} \stackrel{!}{=} 0$

$$(1) t' = t - \frac{|\underline{r}-\underline{r}_0(t')|}{c} \xrightarrow{\text{Lsg.}} t' = t_r!$$

$$\begin{aligned} (2) \left.\frac{df}{dt'}\right|_{t_r} &= -1 - \frac{1}{c} \nabla_0 |\underline{r}-\underline{r}_0(t')| \cdot \left.\frac{d}{dt'} \underline{r}_0(t')\right|_{t_r} \\ &= -1 + \frac{1}{c} \frac{\underline{r}-\underline{r}_0(t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t_r)|} \cdot \underline{v}(t_r) \Big|_{t_r} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \varphi(\underline{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\left|1 - \frac{1}{c} \frac{\underline{r}-\underline{r}_0(t_r)}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t_r)|} \cdot \underline{v}(t_r)\right|} \cdot \frac{1}{|\underline{r}-\underline{r}_0(t_r)|}$$

$$\varphi(\underline{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|1 - \hat{\underline{R}}(t_r) \cdot \underline{\beta}(t_r)|} \frac{1}{R(t_r)}$$

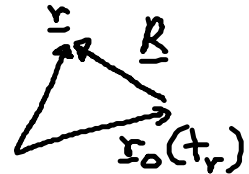
(9.37)

$$\text{mit } \underline{\beta}(t_r) = \frac{\underline{v}(t_r)}{c}$$

$$\underline{R}(t_r) = \underline{r} - \underline{r}_0(t_r), \quad R = |\underline{R}|, \quad \hat{\underline{R}} = \frac{\underline{R}}{R}$$

$$t_r = t - \frac{R(t_r)}{c}$$

$R$  ... Abstand Aufpkt. zu Ladung bei  $t_r$ !



(iv) ebenso:  $\underline{j}(\underline{r}, t) = \underline{j}(\underline{r}, t) \underline{v}(t)$

$$\xrightarrow{(9.34)} \underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c^2} \epsilon_0 \mu_0 \underline{v}(t_r) \varphi(\underline{r}, t)$$

$$\rightarrow \underline{A}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} \underline{\beta}(t_r) \varphi(\underline{r}, t) \quad (9.38)$$

$\varphi$  &  $\underline{A}$  ... Liénard-Wiechert-Potentiale

NB:  $\beta = \frac{v}{c} \ll 1$ : „statische“ Potentiale mit Retardierung

• em Felder:

$$\underline{E} = -\underline{\nabla}\varphi - \frac{\partial \underline{A}}{\partial t} \quad \& \quad \underline{B} = \underline{\nabla} \times \underline{A}$$

nach länglicher Redy: o.B.!

$$\underline{E}(\underline{r}, t) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[ \frac{(\hat{\underline{R}} - \underline{\beta})(1 - \beta^2)}{(1 - \hat{\underline{R}} \cdot \underline{\beta})^3} \frac{1}{R^2} + \frac{1}{c} \frac{\hat{\underline{R}} \times [(\hat{\underline{R}} - \underline{\beta}) \times \dot{\underline{\beta}}]}{(1 - \hat{\underline{R}} \cdot \underline{\beta})^3} \frac{1}{R} \right]_{t=t_r}$$

$$\underline{B}(\underline{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{\underline{R}}(t_r) \times \underline{E}(\underline{r}, t)$$

(9.39)

Discussion:

(1) Terme  $\sim \frac{1}{R^2}$  ... Nahfeld

$\beta \ll 1$  &  $\dot{\beta} = 0$ :  $\underline{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\hat{R}}{R^2}$  ... reelles Coulombfeld  
mit Retardierung

(2) Terme  $\sim \frac{1}{R}$  ... Fernfeld! = Strahlungsfeld

→ Abstrahlung von Energie ins Unendliche!

(3) Abstrahlung nur für:  $\dot{\beta} = \frac{1}{c} \frac{d\underline{v}}{dt} \neq 0$   
= beschleunigte Ladung

(4)  $\underline{B} \perp \underline{R}, \underline{E}$ !

### 9.3.2 Abstrahlcharakteristik von Energie

• nur Terme:  $\underline{E}_{\text{rad}}, \underline{B}_{\text{rad}} \sim \frac{1}{R}$

$$\rightarrow \underline{E}_{\text{rad}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \frac{\hat{R} \times [(\hat{R} - \underline{\beta}) \times \dot{\underline{\beta}}]}{(1 - \hat{R} \cdot \underline{\beta})^3} \frac{1}{R} \sim \frac{1}{R} \quad (9.40)$$

• Poynting-Vektor:

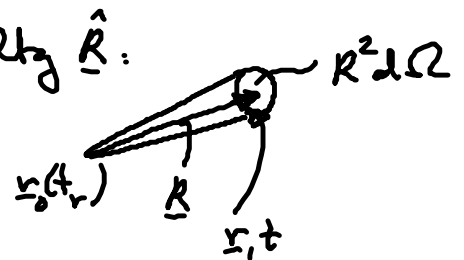
$$\underline{S}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\mu_0} \underline{E}_{\text{rad}} \times \underline{B}_{\text{rad}} \stackrel{(9.39)}{=} \frac{1}{\mu_0 c} \underline{E}_{\text{rad}} \times (\hat{R} \times \underline{E}_{\text{rad}})$$

$$\underline{E}_{\text{rad}} \perp \hat{R} \rightarrow \underline{S}(\underline{r}, t) = \frac{1}{\mu_0 c} |\underline{E}_{\text{rad}}|^2 \hat{R} \quad (9.41)$$

• abgestrahlte Energie in  $d\Omega$  pro Zeit  $dt_r$  in Richtung  $\hat{R}$ :

$$\underline{S}(\underline{r}, t) \cdot \hat{R} R^2 d\Omega dt \quad \text{in Zeit } dt$$

$\frac{dt}{dt_r}$  in Zeit  $dt_r$   
"Sichtverlängerung"



$$\text{mit } t = t_r + \frac{|\underline{r} - \underline{r}_0(t_r)|}{c} = t_r + \frac{|\underline{R}|}{c}$$

$$\frac{dt}{dt_r} = 1 + \frac{1}{c} \frac{d\underline{B}}{dt_r} \cdot \nabla_{\underline{R}} |\underline{R}| = 1 - \underline{\beta}(t_r) \cdot \hat{R}(t_r)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{dP}{d\Omega} &= \underline{S}(r,t) \cdot \hat{R} R^2 (1 - \beta \cdot \hat{R}) \\ &= \frac{1}{\mu_0 c} |\underline{E}_{rad}|^2 R^2 (1 - \beta \cdot \hat{R}) \\ &\quad \& \frac{1}{\mu_0 c} \left( \frac{q}{4\pi\epsilon_0 c} \right)^2 = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{(\hat{R} \times [(\hat{R} - \beta) \times \dot{\beta}])^2}{(1 - \beta \cdot \hat{R})^5}} \quad (9.42)$$

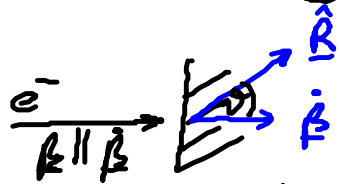
gesamte abgestrahlte Leistung: o.B.

$$\boxed{P = \int \frac{dP}{d\Omega} d\Omega = \frac{q^2 \dot{\beta}^6}{6\pi \epsilon_0 c} [\dot{\beta}^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2]}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.43)$$

... verallg. Larmor-Formel  
[beliebiges  $\beta$ ]

NB:  $P \propto \gamma^6$  ... starker Anstieg für  $\beta \rightarrow 1$

Bremsstrahlung:  
(i) Geometrie:



Metall: z.B. Anode in Röntgen-Röhre

(ii) Abschätzung: bei Aufschlag: starke Abbremsung

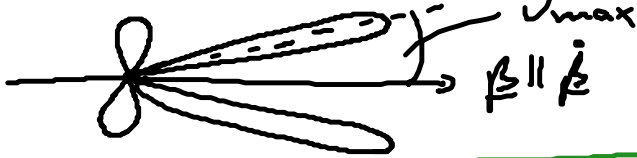
$$\begin{aligned} \beta \parallel \dot{\beta}, \quad \beta \cdot \hat{R} &= \beta \cos \vartheta, \quad [\hat{R} \times (\hat{R} \times \dot{\beta})]^2 = \dots \\ &= \dot{\beta}^2 \sin^2 \vartheta \end{aligned}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{dP}{d\Omega} = \frac{q^2}{16\pi^2 \epsilon_0 c} \dot{\beta}^2 \frac{\sin^2 \vartheta}{(1 - \beta \cos \vartheta)^5}} \quad (9.44)$$

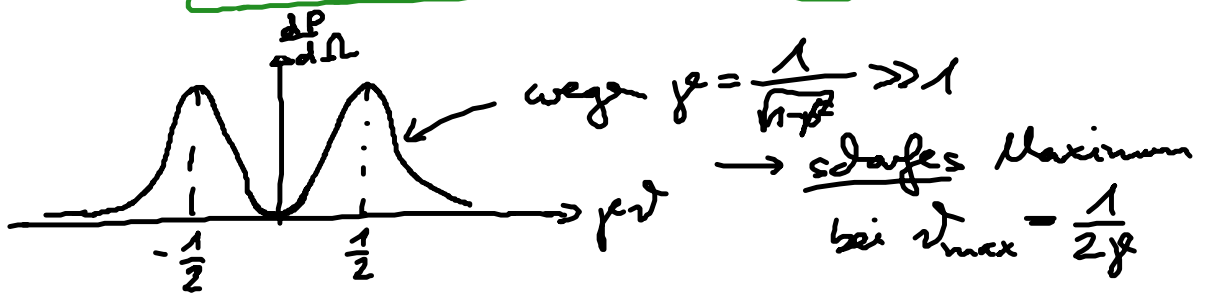
(iii) Polar diagramm:

$\beta \ll 1$

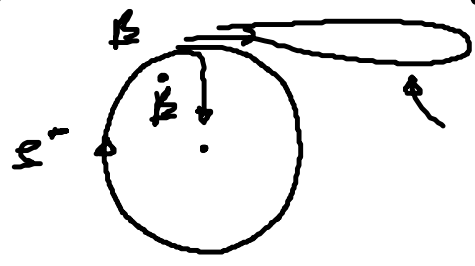
?



$\beta \rightarrow 1$ : (o.B.)  $\frac{dP}{d\Omega} = \frac{2q^2}{\pi^2 \epsilon_0 c} \frac{1}{k} \gamma^2 \beta^8 \frac{(\beta^2 \gamma^2)^2}{(1 + \beta^2 \gamma^2)^5}$  (9.45)



• Synchrotron - Strahlung:



$\beta \rightarrow 1$   
 überdeckt großen Frequenzbereich  
 von Mikrowellen  $\rightarrow$  harte Röntgenstrahlung