

3. Hydrodynamik Newtonscher Flüssigkeiten

3.1 Kinematik

a) materielle und räumliche Koordinaten

$$\sum_{\mathcal{F}} \mathbb{R}^3 \times = x(\mathcal{F}, t)$$

b) Konvektionsformel: $\varphi(x, t)$

totale Zeitableitung:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \varphi} \quad (3.3)$$

... Konvektionsformel

c) Deformationsrate

• Ziel: Variable, die Dehnung / Kompression von Flüssigkeit erfasst



(i) Geschwindigkeitsgradient:

• Betrachte



Tangentenvektor:

$$\underline{a}_0 = \frac{\partial}{\partial s} \underline{x}(s)$$

$$\longrightarrow \underline{a} = \frac{\partial}{\partial s} \underline{x}(\underline{x}(s), t) \quad \text{mit} \quad a_i = \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \frac{\partial s_j}{\partial s} \quad (3.4)$$

• Führe ein:

$$\underline{F} \quad \text{mit} \quad F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial s_j} \quad (3.5)$$

... jacobische Matrix

also: (3.4) \longrightarrow $\boxed{\underline{a} = \underline{F} \underline{a}_0}$ (3.6)

• Betrachte: $\frac{d}{dt} \underline{a} \stackrel{(3.6)}{=} \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} \underline{a}_0$
 $\stackrel{(3.6)}{=} \frac{\partial \underline{F}}{\partial t} \underline{F}^{-1} \underline{a}$ mit $(\underline{F}^{-1})_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ (Zeige durch Kettenregel von $\underline{F} \underline{F}^{-1} = \underline{1}$)

in Komponenten:
 $L_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial}{\partial t} x_i \right) \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \nabla_j v_i$


also: $\frac{d}{dt} \underline{a} = \underline{L} \underline{a}$ (3.7)
 mit $L_{ij} = \nabla_j v_i$
 ... Geschwindigkeitsgradient

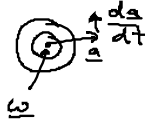
• Zerlegung:
 $\underline{L} = \frac{1}{2} (\underline{L} + \underline{L}^t) + \frac{1}{2} (\underline{L} - \underline{L}^t)$ (3.8)
 $= \underline{A} + \underline{W}$

$A_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j v_i + \nabla_i v_j)$... Deformationsrate =
 Verformungsgeschw. tensor
 $W_{ij} = \frac{1}{2} (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j)$... Drehgeschwindigkeitstensor

(ii) Bedeutung von \underline{W}

• \underline{W} ist antisymmetrisch: $\underline{W} = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}$

• Führe ein: $\underline{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \underline{v}$ (3.9)
 mit $\omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \nabla_j v_k = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} W_{jk}$
 $\frac{1}{2} (\nabla_j v_i - \nabla_i v_j)$... Drehvektor
 Vortex in Flüssigkeit 

dannes gilt: $\underline{\omega} \times \underline{a} = \underline{W} \underline{a}$ (3.10)
 ... Drehung von \underline{a}
 Beweis: selber 

(iii) Deformationsrate

• Betrachte: $\frac{d\underline{a}}{dt} \rightarrow \underline{L}(\underline{a})$

• zeitliche Änderung von $\underline{a} \cdot \underline{b}$?

$$\frac{d}{dt}(\underline{a} \cdot \underline{b}) = \dot{\underline{a}} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \dot{\underline{b}} \stackrel{(3.7)}{=} \underbrace{\underline{a} \cdot \dot{\underline{b}}}_{\underline{a} \cdot \underline{\dot{b}}} + \underline{a} \cdot \underbrace{\dot{\underline{b}}}_{\underline{\dot{b}}}$$

$$= \underline{a} \cdot (\underline{\dot{b}} + \underline{\dot{b}}) \underline{b}$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{d}{dt}(\underline{a} \cdot \underline{b}) \stackrel{(3.8)}{=} 2 \underline{a} \cdot \underline{\dot{b}}} \quad (3.11)$$

• Interpretation von \underline{A} : mit $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$... Koordinatenbasis

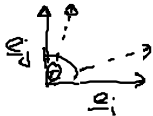
$$(1) \underline{a} = \underline{b} = a \underline{e}_i \stackrel{(3.11)}{\rightarrow} 2 a \dot{a} = 2 a^2 A_{ii}$$

$$\rightarrow \boxed{A_{ii} = \frac{\dot{a}}{a}} \quad (3.12)$$

... relative Dehngeschwindigkeit
von Längen entlang \underline{e}_i

$$(2) \underline{a} = \underline{e}_i, \underline{b} = \underline{e}_j \stackrel{(3.11)}{\rightarrow} \frac{d}{dt} \left(\underbrace{|\underline{e}_i| \cdot |\underline{e}_j|}_{1 \cdot 1} \cos \theta \right) \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 2 A_{ij}$$

$$- \sin \theta \dot{\theta} \Big|_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

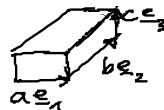


$$\rightarrow \boxed{A_{ij} = -\frac{1}{2} \dot{\theta}} \quad (3.13)$$

... halbe Änderungsgeschwindigkeit
rechter Winkel = Scherrate

(3) Kompressionsrate:

Quader volumen: $V = abc$



$$\text{Betrachte: } \frac{\dot{V}}{V} = \frac{(abc)'}{abc} = \frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c} = \underbrace{A_{11} + A_{22} + A_{33}}_{\text{Sp } \underline{A}} = \nabla_1 v_1 + \nabla_2 v_2 + \nabla_3 v_3$$

$$\rightarrow \boxed{\frac{\dot{V}}{V} = \text{div } \underline{v} = \text{Sp } \underline{A}} \quad (3.14)$$

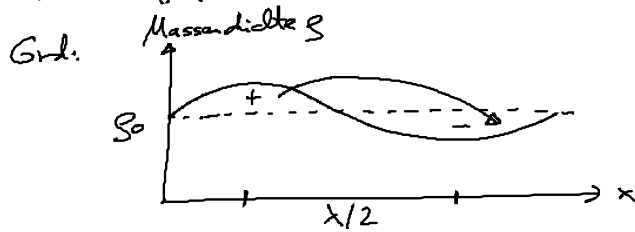
Kompressionsrate / -geschw.
Dilatationsrate / -geschw.

3.2. Einordnung: hydrodynamische Variable

- Ges: Bewegungsgleichungen für Kontinua, insbes. zähe Flüssigkeit
- jedes System: aufgebaut durch Atome: Kollisionen mit mittlerer stoßfreier Zeit τ_c
 → lokales Rem. GG $\hat{=}$ Thermodynamik lokal anwendbar
- hier: Dynamik von Kontinua auf Längenskala \gg Atomabstände
 " " " " Zeiten $\tau_{\#} \gg \tau_c$

also: langsame kollektive Dynamik
 → hydrodynamische Variable:

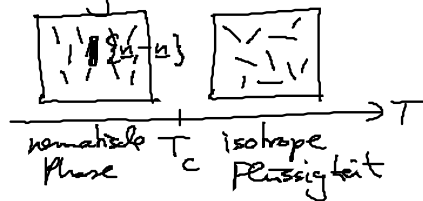
(1) Erhaltungsgröße: Masse, Impuls, Energie



Anspruch der Inhomogenität auf Zeiten
 $\tau \rightarrow \infty$ für $\lambda \rightarrow \infty$

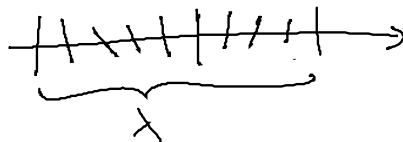
(2) Variable, die gebrochene kontinuierliche Symmetrie beschreiben (Goldstone-Modus)

Bsp: Flüssigkristalle



$n \dots$ Direktor

elastische Deformation

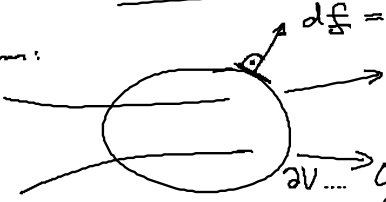


Relaxationszeiten $\tau \rightarrow \infty$
 $\xi = \lambda \rightarrow \infty$

Grd: Rotation des gesamten Systems kostet keine Energie

Wegweiser: s. Folie

3.3 Massenbilanz

- Kontinuum:  $df = df n$... Oberfläche element
[n ... Oberfläche normale mit $|n|=1$]
Oberfläche
V ... Volumen (fest im Raum)

- Gesamtmasse:

$$M(t) = \int_V \rho(\underline{x}, t) d^3x$$

ρ ← Massendichte

- Massenverhaltung:

$$\frac{dM}{dt} = \int_V \frac{\partial}{\partial t} \rho(\underline{x}, t) d^3x = - \int_V \underbrace{j(\underline{x}, t) \cdot df}_{\substack{\text{Masse, die durch} \\ \text{die Oberfläche raus-} \\ \text{fließt pro Zeiteinheit} \\ \text{[s.u.]}}} = - \int_V \text{div } j d^3x$$

V beliebig \rightarrow

$$\boxed{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0} \quad (3.15a)$$

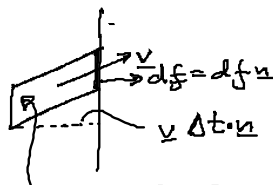
... Kontinuitätsgleichung
Erhaltungssatz für Masse

mit

$$\boxed{j = \rho v \dots \text{Massenstromdichte}} \quad (3.15b)$$

= Dichte Erhaltungsgröße \times Geschw.

Beweis:



Masse durch Fläche df in Zeit Δt

$$\rho \Delta V = \rho v \Delta t \cdot n \cdot df = \rho v \Delta t \cdot df \rightarrow \frac{\rho \Delta V}{\Delta t} = \rho v \cdot df$$

- (3.15a) ... gültig für alle Erhaltungsgröße

(3.15b) ... „konvektiver“ Anteil von j

- in kompressible Flüssigkeit: $\frac{d\rho}{dt} = 0$ (3.17)

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} s = \underbrace{\frac{\partial s}{\partial t} + \underline{\nabla} \cdot (s \underline{v})}_{=0 \text{ (3.15)}} - s \underline{\nabla} \cdot \underline{v} \rightarrow \boxed{\text{div } \underline{v} = 0} \quad (3.16)$$