

## 2. Vektor- und Tensorrechnung

- Motivation:  
Grundlagen der Vektor-/Tensorrechnung wiederholen,  
wichtig für Kontinuumslehre

### 2.1 Grundlagen des Euklidischen Raumes

#### a) physikal. Ausdehnungsraum

- im folgenden:

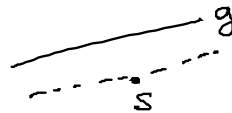
$$\boxed{\text{Physikal. Ausdehnungsraum } A} \\ = \text{euklidischer Raum} = \text{flacher Raum} \quad (2.1)$$

→ euklidische Geometrie gilt:

Bsp: (i) Winkelsumme im Dreieck =  $180^\circ$

(ii) Satz von Pythagoras:  $a^2 + b^2 = c^2$

(iii) Parallelaxiom:



- Unterschiede:

(i) physikal. Ausdehnungsraum A mit Punkte P

(ii) Vektorraum  $V_P$  („Tangentenraum“), angeheftet an jeden P,  
in dem die physikal. Vektoren wirken

- gekrümmte Räume: Bsp:



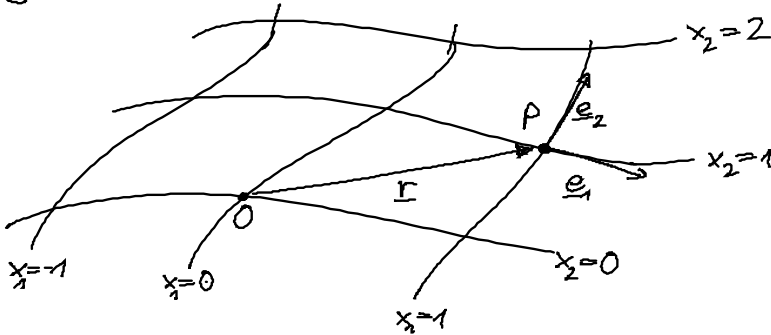
- flacher Raum: Pkte. in A definieren Vektoren [s. Def. (2.2)]  
→ Unterschied fundamental!

- Def.: affiner Raum } s. Folien  
euklidischer }

b) Koordinatensysteme

- Motivation: Koordinat von Pkt. P, für Beschg von Skalar-, Vektor-, Tensorfelder
- Ort von Pkt P  $\leftrightarrow$  Koordinat-triplet:  $(x_1, x_2, x_3)$

(i) allgemeine (krümmige) Koordinat:



Ort von P:  $(x_1, x_2, x_3)$  mit Ortsvektor  $r = \vec{OP}$  [ $\in V$ !!]

- natürliche (Koordinat) basis für  $V_P$  angelegt in P.
- normierte Tangentialvektoren  $e_i$  an  $x_i$ -Linien ( $x_j = \text{const.}, j \neq i$ )

also: 
$$e_i = \frac{|\partial r}{\partial x_i}|^{-1} \frac{\partial r}{\partial x_i} \quad (2.5)$$

mit  $|e_i| = 1$ , i.a.  $e_i \cdot e_j \neq 0$  und  $\{e_1, e_2, e_3\}$  ortsfest

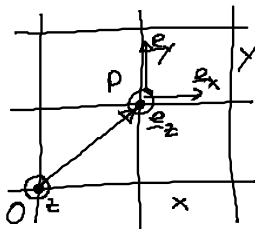
$$\rightarrow T_{kl}^i = e_i \cdot \frac{\partial e_k}{\partial x_l} \quad (2.6)$$

..., "Konnexionskoeff."

NB: (1) i.f.  $e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$ , also Orthonormalbasis (ONB) <sup>(2.7)</sup>

(2) in ART:  $e_i = \frac{\partial r}{\partial x_i}$

(ii) Kartesische Koord.



P:  $(x, y, z)$

•  $\{e_x, e_y, e_z\}$  ortsfest

$e_i \cdot e_j = \delta_{ij}$   $i, j = x, y, z$

$$\rightarrow \left. \begin{array}{l} \{e_x, e_y, e_z\} \text{ ortsfest} \\ e_i \cdot e_j = \delta_{ij} \quad i, j = x, y, z \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} r = x_i e_i = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.8) \\ T_{kl}^i = 0! \end{array}$$

(iii) Zylinderkoordinat: s. Folie

(iv) Kugelkoordinat: s. Übung

## 2.2 Tensoren 2. Stufe

a) Einleitung:

Tensoren 0. Stufe = Skalare

• 1. Stufe = Vektoren  $\underline{a} \in V_p$

$$\underline{a} = \sum_i a_i \underline{e}_i = a_i \underline{e}_i \quad \text{mit } \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\} \dots \text{ONB in } V_p \quad (2.14)$$

Schreibweise:

$$\underline{a} = \begin{cases} \text{Vektor} \\ \text{Matrixdarstellg. } \underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

jetzt Tensor 2. Stufe

b) Definitionen & dyadisches Produkt

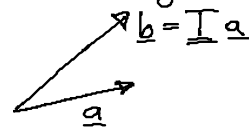
Def:

Tensoren 2. Stufe vermitteln eine lineare Abbildung von  $V_p$  in sich:

$$\underline{I}: V_p \rightarrow V_p$$

$$\underline{I}: \underline{a} \rightarrow \underline{b} := \underline{I} \underline{a}, \quad \underline{a}, \underline{b} \in V_p$$

$$\text{Linearität: } \underline{I}(p \underline{a} + q \underline{b}) = p \underline{I} \underline{a} + q \underline{I} \underline{b}, \quad p, q \in \mathbb{R}$$

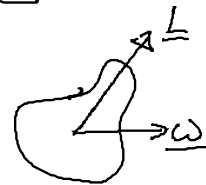


(2.15)

• Bsp1: starrer Körper:

$$\underline{L} = \underline{\Theta} \underline{\omega}$$

↑ Drehimpuls      ↑ Trägheitstensor      ↑ Winkelgeschw.



Bsp2: Spannungstensor: charakterisiert Material ( $\rightarrow$  Kapitel 3)

Ursprung des Wortes: Tensor (lat. tendo: ich spanne)

• Komponenten von  $\underline{I}$  bzgl. Basis in  $V_p$ :  $\rightarrow$  Rechnen

$$\underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{I} \underline{a} \rightarrow b_i = \underline{e}_i \cdot \underline{b} = \underline{e}_i \cdot \underline{I} \underline{a} = \underline{e}_i \cdot \underline{I} (a_j \underline{e}_j)$$

$$\xrightarrow{\text{Linearität}} b_i = (\underline{e}_i \cdot \underline{I} \underline{e}_j) a_j$$

$$\rightarrow \boxed{T_{ij} := e_i \cdot \underline{I} e_j} \quad (2.16)$$

... Komponenten von  $\underline{I}$

$$\rightarrow \boxed{b_i = T_{ij} a_j} \quad (2.17)$$

Schreibweise:

$$\underline{I} \begin{cases} \text{Tensor 2. Stufe} \\ \text{Matrixdarstellung} \end{cases} : \underline{I} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ T_{31} & \dots & T_{33} \end{pmatrix}$$

$$\text{also: } \underline{b} = \underline{I} \underline{a} \begin{cases} \text{lineare Abbildg.: darstellgsfrei} \\ \text{in Matrixschreibweise} \end{cases}$$

Def: Das Tensor-/dyadische Produkt von  $\underline{a}, \underline{b} \in V_p$ :

$$\underline{a} \otimes \underline{b} \in V_p \times V_p \text{ (Produktraum)}$$

besitzt die Eigenschaften:

1. Bilinearität:  $\underline{a} \otimes \underline{b} = (a_i e_i) \otimes (b_j e_j) = a_i b_j (e_i \otimes e_j)$
2. lineare Abbildg.:  $(\underline{a} \otimes \underline{b}) \underline{c} := \underline{a} (\underline{b} \cdot \underline{c}) \in V_p$

(2.18)

Q.18) legt nahe:

Sub:

Tensoren 2. Stufe sind Elemente des Produkt raumes  $V \times V$ , der durch die Basisvektoren  $\{e_i \otimes e_j, ij=1,2,3\}$  aufgespannt wird:

$$\underline{I} = T_{ij} e_i \otimes e_j$$

(2.19)

... Entwicklung von  $\underline{I}$  nach Basis!

$$[\text{vgl. } \underline{a} = a_i e_i]$$

$$\begin{aligned} \text{Beweis: } (2.16) \quad T_{ij} &= e_i \cdot \underline{I} e_j \stackrel{(2.19)}{=} e_i \cdot (T_{kl} e_k \otimes e_l) e_j \\ &= T_{kl} e_i \cdot (e_k \otimes e_l) e_j = T_{kl} \underbrace{e_i \cdot e_k}_{\delta_{ik}} \underbrace{e_l \cdot e_j}_{\delta_{lj}} = T_{ij} \quad \checkmark \end{aligned}$$

NB:  $\boxed{(a \otimes b)_{ij} = a_i b_j} \quad (2.20)$

$a_i k \quad a_l j$

c) Spezielle Tensoren:

• transponierte Tensor:  $\underline{\underline{T}}^t : \boxed{\underline{a} \cdot \underline{\underline{T}} \underline{b} = \underline{b} \cdot \underline{\underline{T}}^t \underline{a}} \quad (2.21)$

$\xrightarrow[\substack{a=e_j \\ b=e_i}]{(2.16)}$   $\underline{T}_{ij} = (\underline{\underline{T}}^t)_{ji}$

$\underline{\underline{T}} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & \dots \\ T_{21} & T_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \rightarrow \underline{\underline{T}}^t = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & \dots \\ T_{12} & T_{22} & \\ \vdots & & \end{pmatrix}$

• allg. Tensor 2. Stufe (in 3 Dim.):  $3 \times 3 = 9$  unabh. Komponenten

symmetrischer Tensor:  $\boxed{\underline{\underline{T}}^t = \underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = T_{ij}} \quad (2.22)$

... 6 unabh. Komp.  $T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Bsp: Spangeltensor

antisymmetr. Tensor

$\boxed{\underline{\underline{T}}^t = -\underline{\underline{T}} \xrightarrow{(2.21)} T_{ji} = -T_{ij}} \quad (2.23)$

$\rightarrow T_{11} = T_{22} = T_{33} = 0$

... 3 unabh. Komp.  $T_{12}, T_{13}, T_{23}$

Bsp:  $\underline{v} = \underline{\omega} \times \underline{r} = \underline{\underline{\Omega}} \underline{r}$  mit  $\Omega_{ij} = \epsilon_{ijk} \omega_k$

$\uparrow$   
 $v_i = \epsilon_{ijk} \omega_k r_j$   $\underline{\underline{\Omega}} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$