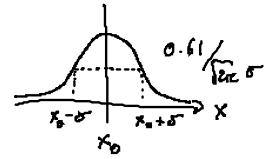




• Bsp. Gaußsche / Normalverteilung:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (9.7)$$



Momente

$$\langle (x-x_0)^n \rangle = (n-1)!! \sigma^n \quad n \text{ gerade}$$

$$\langle (x-x_0)^n \rangle = 0 \quad n \text{ ungerade}$$

$$\langle x \rangle = x_0$$

wobei  $(n-1)!! = (n-1)(n-3)(n-5) \dots$

• Kenntnis aller  $\langle x^n \rangle \leftrightarrow P(x)$  (9.9)

Beweis über charakt. Funktion:  $G(k) = \langle e^{-ikx} \rangle$

mehrdimensionale Verteilungen  $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \dots$  stoch. variable

$P(\underline{x}) d^n x \dots$  Wahrscheinlichkeit für  $\underline{x} \in [x_1, dx_1, \dots, x_n, dx_n]$

(i) unabhängige stochastische Variablen  $x, y$ :

$$P(x, y) = P(x)P(y) \quad (9.10)$$

... Multiplikationsregel

(ii) Korrelationsfunktion

$$C_{ij} = \langle (x_i - \langle x_i \rangle)(x_j - \langle x_j \rangle) \rangle \quad (9.11)$$

$$= \langle x_i x_j \rangle - \langle x_i \rangle \langle x_j \rangle$$

... Kovarianzmatrix

Stochastisch unabhängige Variablen  $\rightarrow C_{ij} = 0$

(iii) Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte  $P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n)$

für  $x_1, \dots, x_k$  wenn  $x_{k+1}, \dots, x_n$  mit Sicherheit vorliegen

$$P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) = \frac{P(x_1, \dots, x_n)}{P(x_{k+1}, \dots, x_n)}$$

(9.12)

wobei  $P(x_{k+1}, \dots, x_n) = \int P(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_k$

[Beweis:  $P(x_1, \dots, x_n) = P(x_1, \dots, x_k | x_{k+1}, \dots, x_n) P(x_{k+1}, \dots, x_n)$ ]

### 9.2 Zentraler Grenzwertsatz

Seien  $x_1, x_2, \dots, x_n$  voneinander unabhängige Zufallsvariable mit derselben Wahrscheinlichkeitsverteilung  $w(x)$ , also insbesondere ist  $\langle x_i \rangle = \langle x \rangle$  und  $\Delta x_i = \Delta x$  dann ergibt die Zufallsvariable  $y = x_1 + \dots + x_n$  im Grenzfall  $N \rightarrow \infty$  der Gaußschen Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$P(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\Delta y)^{1/2}} e^{-\frac{(y - \langle y \rangle)^2}{2(\Delta y)^2}} \quad (9.13)$$

mit  $\langle y \rangle = N \langle x \rangle$  und  $\Delta y^2 = N \Delta x^2$ . Insbesondere gilt  $\frac{\Delta y}{\langle y \rangle} = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle} \frac{1}{\sqrt{N}}$  also Aussagen über  $y$  sind für große  $N$  scharf.

• Beweis: Stat Phys WS 16/17 Kap 3.5 Vorlesung vom 1/11

### 9.3 Zeitabhängige Zufallsvariablen

• Behandlung in 1D:  $x = x(t)$  zeitabh. Zufallsvariable

• Führe ein:  $P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) dx_1 \dots dx_n$  mit  $t_1 < t_2 < \dots < t_n$  (9.14)

... Wahrscheinlichkeit  $x$  zur Zeit  $t_1$  in  $[x_1, x_1 + dx_1]$   
 $t_2$  in  $[x_2, x_2 + dx_2]$   
 $\vdots$   
 $t_n$  in  $[x_n, x_n + dx_n]$   
 vorzubringen

Bem: (i) für  $n=1, 2, \dots \rightarrow$  Hierarchie von Wahrscheinlichkeitsdichten

(ii) insbesondere  $P(x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_1, t_1) = \int P(x_n, t_n; x_{n+1}, t_{n+1}; \dots; x_1, t_1) dx_n$  (9.15)

• Zeitkorrelationsfunktion:

Bsp  $\langle x(t_2) x(t_1) \rangle = \iint x_2 x_1 P(x_2, t_2; x_1, t_1) dx_2 dx_1$  (9.16)

a) Klassifizierung Stochastischer Prozesse:

- Bedingte Wahr.-dichte [vgl. Gl. (1.12)]

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = \frac{P(x_n, t_n, \dots, x_1, t_1)}{P(x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1)} \quad (1.17)$$

... für  $x_n, t_n$  wenn  $x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1$  mit Sicherheit vorliegen

- reiner Zustandsprozess:

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n) \quad (1.18)$$

(1.17)  
 $\leftrightarrow P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n) \dots P(x_1, t_1)$

keine Korrelation zwischen verschiedenen Zeiten

→ nicht möglich in physikalischen Systemen mit  $x = x(t)$   
 da irgend eine Dynamik wird  $x_{n-1}(t_{n-1}) \rightarrow x_n(t_n)$

- Markov-Prozess

$$P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}, \dots, x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \quad (1.19)$$

(1.19)  
 $\leftrightarrow P(x_n, t_n; \dots; x_1, t_1) = P(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) P(x_{n-1}, t_{n-1} | x_{n-2}, t_{n-2}) \dots$   
 $\dots P(x_2, t_2 | x_1, t_1) P(x_1, t_1)$

→ nur Gedächtnis für vorigen Zeitpunkt!

[ wenn er zu weit zurück liegt  $\Rightarrow$  keine Korrelationen  
 existiert wenn er nahe genug an  $t_n$  liegt  $\Rightarrow$  Korrelation  $\Leftrightarrow t_n - t_{n-1} \leq \tau$  ]

Übergangswahrscheinlichkeiten

$$P(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \frac{P(x_2, t_2; x_1, t_1)}{P(x_1, t_1)}$$

→  $P(x_2, t_2; x_1, t_1)$  bestimmt den Markov-Prozess vollständig!

insbesondere gilt:

$$P(x_3, t_3 | x_1, t_1) = \int P(x_3, t_3 | x_2, t_2) P(x_2, t_2 | x_1, t_1) dx_2$$

... Chapman-Kolmogorow-Gl

"bedingte Wahrscheinlichkeit, egal welche Werte  $x_2$  angenommen wird"

10. Stochastische Beschreibung der Kolloiddynamik

• Motivation:

- (i) Langevin-Gl für Kolloid-Suspensionen [s. Kap 10.2]
  - stochastische Kraft ist therm. Ursprungs
  - bestimmt durch Fluktuation-Dissipations-Theorem [s. Kap. 10.1]
  - [ausführliche Behandlung Stat Phys WS 16/17 Kap. 7 Vorlesung vom 07/02]
- (ii) Brownsche Dynamik - Simulationen [s. Kap 10.4]
  - = numerischen Lösungen der Langevin-Gl
- (iii) Smoluchowski-Gl [s. Kap 10.5] = Gl für  $P(x,t)$

• allgemeine stoch. Prozesse [stochastische Kräfte ohne Fluktuation-Dissipations-Theorem] s. Kap 11

10.1 Fluktuation-Dissipations-Theorem

• Zwei Situationen:

(i) Dynamik eines Systems in linearer Antwort

$$\begin{aligned} \underline{x}(t) &= \underline{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} && \dots \text{dynamische Variable} \\ \underline{F}(t) &= \underline{F}(\omega) e^{-i\omega t} && \dots \text{externe Kraft} \end{aligned} \quad (10.1)$$

$$\boxed{\underline{\chi}(\omega) = \underline{\chi}'(\omega) \underline{F}(\omega)} \quad (10.2)$$

Antwort-Funktion

Green-Funktion

$$\underline{\chi}(t) = \int \underline{\chi}'(t-t') \underline{F}(t') dt' \quad (10.3)$$

- NB:
- (1) Dynamik eines Systems im Nichtgleichgewicht, aber nahe dran
  - (2) einheiten [F x] = Energie

Bsp: gedämpfte Oszillation

$$(10.1) \quad \left( m \frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma m \frac{d}{dt} + m\omega_0^2 \right) x(t) = F(t) \quad (10.4)$$

$$\rightarrow \left( -m\omega^2 - i\omega 2\gamma m + m\omega_0^2 \right) \underline{\chi}(\omega) e^{-i\omega t} = \underline{F}(\omega) e^{-i\omega t}$$

$$\rightarrow \underline{\chi}(\omega) = \frac{1}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - 2i\gamma\omega)} \stackrel{!}{=} \underline{\chi}'(\omega) + i \underline{\chi}''(\omega) \quad (10.5)$$