

# 1. Allgemeine Beschreibung stochastischer Prozesse

• Motivation:

- (i) allgemeine Theorie der stochast. Differentialgl. (SDG)  
 $T(t) \dots$  stochastische Kraft
- (ii) Ito-/Stratonov-Interpretation
- (iii) Herleitung der Fokker-Planck-Gl.

## 1.1 Stochastische Differentialgleichung I

• allgemeine 1D-Langevin-Gl. = SDG:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= h(x,t) + g(x,t)T(t) \\ \text{mit } \langle T(t) \rangle &= 0, \quad \langle T(t)T(t') \rangle = \delta(t-t') \end{aligned} \quad (M.1)$$

Kern: (i)  $T(t) \dots$  Gaußsches weißes Rauschen  
 durch  $\langle TT \rangle$  bestimmt  $\langle TT \rangle = \delta(t-t')$

(ii)  $g \dots$  Stärke von  $T(t)$

(iii) nicht unbedingt Fern. Ursprungs Bsp: aktive Teilchen, Mikroorganismen

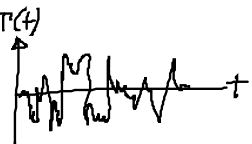
(iv)  $g = g(t) \dots$  additives Rauschen

$g = g(x,t) \dots$  multiplikatives \*

• formale Integration:  $\int_t^{t+\tau} (M.1) dt'$

$$x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x,t') dt' + \int_t^{t+\tau} g(x,t') T(t') dt' \quad (M.1b)$$

Problem:  $T(t)$



$\dots$  hochgradig irregulär, Korrelationszeit = 0!  
 $\rightarrow \int_t^{t+\tau} \dots T(t') dt'$  nicht definierbar

• Ansatz:

(i) Betrachte:  $h=0, g=1$

(M.1)  $\rightarrow$  Brownsche Bewegung:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= T(t) \\ \text{mit } \langle x(t) \rangle &= 0, x(0) = 0 \\ \langle [x(t+\tau) - x(t)]^2 \rangle &= \tau \\ \text{bzw. } \langle x(t+\tau)x(t) \rangle &= t \end{aligned} \quad (M.2)$$

Beweis: (1)  $\langle [\dots]^2 \rangle \dots$  s. (10.23) ( $m=0$ )  $f_{cu} = T(t)$   
 $\langle T^2 \rangle = 2k_B T f_{\delta}(t, t+\tau)$   
 (10.25)  $\langle x^2 \rangle = 2Dt, D = \frac{k_B T}{\gamma}$   
 jetzt:  $\gamma=1, k_B T = \frac{1}{2} \rightarrow D = \frac{1}{2} \checkmark$

$$(2) \langle x(t+\tau)x(t) \rangle = \frac{1}{2} \left[ \langle x^2(t+\tau) + x^2(t) - [x(t+\tau) - x(t)]^2 \rangle \right]$$

$$\stackrel{(M.1)}{=} \frac{1}{2} [t+\tau + t - \tau] = t \quad \text{qed}$$

$\rightarrow$  andere Sichtweise auf (M.1b)

(ii) Führe ein: 
$$W(\tau) = x(t+\tau) - x(t) = \int_t^{t+\tau} T(t') dt' \quad (M.3)$$

Bem: (1) stochastische Variable, gleiche Markt wie  $x$  von Brownscher Bewegung  
 (2) glattere Funktion als  $T(t)$ !

definiere:

$$\begin{aligned} &\text{Wiener Prozess:} \\ &\text{stochastische Variable } W(t) \\ &\text{mit } W(0) = 0 \\ &\langle W(t) \rangle = 0, \quad \langle W(t+\tau)W(t) \rangle = t, \quad \tau \geq 0 \end{aligned} \quad (M.4)$$

NB: formal  $dW = T(t) dt$ , aber  $\dot{W} = T(t)$  existiert nicht!

dam:  $\dot{W} \sim \frac{W(t+\varepsilon) - W(t)}{\varepsilon} \sim \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\varepsilon} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0$

↑  
"verhält sich wie"

$\rightarrow$  Wiener-Prozess ist nicht differenzierbar

(iii) also: (M.1b)

$$\boxed{x(t+\tau) = x(t) + \int_t^{t+\tau} h(x, t') dt' + \int_t^{t+\tau} g(x, t') dW(t')} \quad (M.5)$$

stochastische Variable:  $x(t')$   
 ist Funktion von  $W(t')$ !  
 Integration?

## M.2 Integrale nach Ito & Stratonovitch

• Definitionen der Integration:

Berechne:  $\int_0^t dW(t')$  mit  $N+1$  Stützstellen  $t_i$ ,  $i=0, \dots, N+1$

$\Delta t$   
 $t_0=0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \dots \quad t_N=t_{N+1}$

(i) nach Ito:

$$\boxed{A_I = \int_0^t g[x(t'), t'] dW(t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N g[x(t_i), t_i] \underbrace{[W(t_{i+1}) - W(t_i)]}_{\Delta W(t_i)}} \quad (M.6)$$

NB:  $g$  am Anfang des  $\Delta t$ -Intervalls

(ii) nach Stratonovitch:

$$\boxed{A_S = \int_0^t g[x(t'), t'] dW(t') = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N g\left(\frac{x(t_i) + x(t_{i+1})}{2}, \frac{t_i + t_{i+1}}{2}\right) [W(t_{i+1}) - W(t_i)]} \quad (M.7)$$

NB:  $g$  in der Mitte des  $\Delta t$ -Intervalls!

Bem: (1) gewöhnliche Riemannsche Integrale:  $A_I = A_S$   
 hier nicht: s.u.

(2)  $A_I$  ist stochast Variable!

Sichtweise:

$$\text{Integrale } A_I, \bar{A}_I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=0}^N f[x(t_i), x(t_{i+1}), W(t_i), W(t_{i+1})]$$

$t_i, t_{i+1}$

sind identisch, falls mittlere quadratische Abweichung  $\langle (A_I - \bar{A}_I)^2 \rangle = 0$

Bsp: s.u.

ebenso für  $A_S$

• Beispiel: Berechne  $\int_0^t \omega(t') d\omega(t')$

$$(i) A_I = \sum_{i=0}^N \omega(t_i) \underbrace{[\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)]}_{\Delta\omega(t_i)}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \left\{ \underbrace{[\omega(t_i) + \Delta\omega(t_i)]^2}_{\omega^2(t_{i+1})} - \omega^2(t_i) - \Delta\omega^2(t_i) \right\}$$

$$= \frac{1}{2} [\omega^2(t_{N+1}) - \underbrace{\omega^2(0)}_{=0}] - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N \Delta\omega^2(t_i)$$

$\uparrow$   
 $t$

Berechne im Mittel!

$$\langle \sum \Delta\omega^2(t_i) \rangle = \sum \langle [\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)]^2 \rangle$$
$$= \sum_i \langle \omega^2(t_{i+1}) - 2\omega(t_{i+1})\omega(t_i) + \omega^2(t_i) \rangle$$
$$= \sum_i \underbrace{(t_{i+1} - 2t_i + t_i)}_{\Delta t} = t$$

$$\rightarrow \boxed{A_I = \frac{1}{2} \omega^2(t) - \frac{t}{2}} \quad (M.8)$$

insbes.:  $\langle A_I \rangle = 0$

$$(ii) A_S = \sum_{i=0}^N \frac{\omega(t_i) + \omega(t_{i+1})}{2} [\omega(t_{i+1}) - \omega(t_i)]$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^N [\omega^2(t_{i+1}) - \omega^2(t_i)]$$

$$\xrightarrow{\text{s.o.}} \boxed{A_S = \frac{1}{2} \omega^2(t) \neq A_I} \quad (M.9)$$

insbes.:  $\langle A_S \rangle = \frac{t}{2}$

NB: bei Stratonow: Integrationsregel wie bei Riemann-Integral  
bei Ito: andere Regel!

### 11.3 Stochastische Differentialgleichung III

• verschiedene Interpretationen der SDG:

(i) Ito-Interpretation: (11.5) mit  $\tau = dt \rightarrow 0$ ,  $t' = t$

$$\rightarrow x(t+dt) = x(t) + h(x,t)dt + \underbrace{g(x,t)}_{\text{zur Anfangszeit } t!!} dW(t) \quad (11.10)$$

Fürwahr:  
wegen  $\langle dW^2(t) \rangle = \langle [W(t+dt) - W(t)]^2 \rangle$   
(11.4)  $= t+dt+t-2t = dt$

$$dW(t) = dw \sqrt{dt} \quad (11.11)$$

$$\rightarrow \begin{cases} dx(t) = x(t+dt) - x(t) \\ = h(x,t)dt + g(x,t)dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw \rangle = 0 \\ \langle d^2w \rangle = 1 \end{cases} \quad (11.12)$$

... SDG in Ito-Interpretation

Bem:  $dw$  ... Gaußsche Zufallsvariable, Varianz 1

$\langle \dots \rangle$  aus (11.4) mit (11.11)

(ii) Stratonovich-Interpretation:

Schreibe formal:

$$\begin{cases} dx(t) = h(x,t)dt + g(x,t) \circ dw\sqrt{dt} \\ \text{mit } \langle dw \rangle = 0 \\ \langle d^2w \rangle = 1 \end{cases} \quad (11.13)$$

↑  
verwende  
Stratonovich-Regel

... SDG in Stratonovich-Interpretation