

English Summary

Networks are everywhere: social, physical/technological, biological context etc.

Examples from network science:

1) theory of scale-free networks (preferential attachment)

(i) add nodes one by one with m stubs (open links)

(ii) connect stubs to existing nodes according to their degree: high-degree nodes are more likely to receive new links

\Rightarrow power-law degree distribution $p(k) \sim k^{-\gamma}$

important for robustness of networks

2) data/applications:

a) disease spreading

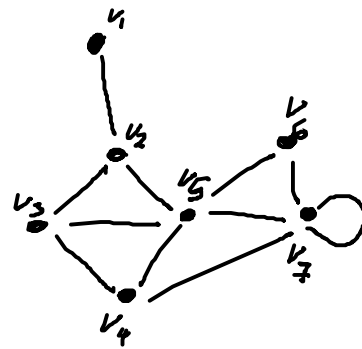
b) science of fake news

c) outbreak containment

2 Network characteristics

Frage: Welche Kenngrößen beschreiben ein Netzwerk?

Was zeichnet ein Netzwerk aus?



Notation/Vokabular:

Ein Netzwerk besteht aus Knoten v_i und Links e_{ij} als Verbindung zwischen v_i und v_j .

|| Graph || Vertices || Kanten (edges)

Größe eines Netzwerks: Anzahl der Knoten $\#v_i = N$ (oben, $N=7$)

Anzahl der Links $\#e_{ij} = L$ (oben, $L=11$)

Topologie eines Netzwerks: v_i und v_j heißen benachbart, wenn es eine Kante e_{ij} von v_i nach v_j gibt

mathematische Beschreibung durch Adjazenzmatrix $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$

$a_{ij} = 1$ wenn ein Link von v_j nach v_i existiert

$a_{ij} = 0$ sonst

⇒ ungerichtetes Netzwerk
 $\hat{=}$ symmetrisches A
 $a_{ij} = a_{ji}$

Bsp. von oben

$$A = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Was mit dem?

Ⓛ ← Selbstkopplung (self-loop)

gerichtete Netzwerke: $a_{ij} \neq a_{ji}$ wenn es keine reziproke / bidirektionale Verbindung gibt (entweder $v_i \rightarrow v_j$ oder $v_j \rightarrow v_i$)

Konvention (in der Vorlesung): $a_{ij} \hat{=} a_{j \leftarrow i}$ (siehe Lineare Algebra)

$$\underline{x} = \underline{A} \underline{x}$$

andere Konvention häufig in Graphentheorie

gewichtete Netzwerke: Matrix $\{w_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ mit $w_{ij} \in \mathbb{R}$ als Gewicht des Links $v_j \rightarrow v_i$

Grad eines Knoten $k_i = \#$ Nachbarn im Netzwerk

$$= \sum_{j=1}^N a_{ij}$$

Bsp von oben: $k_1=1, k_2=3, k_3=3, k_4=3, k_5=5, k_6=2, k_7=4$

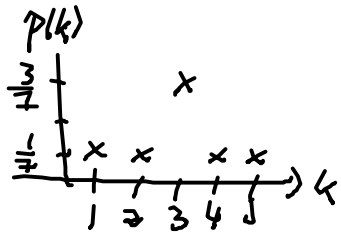
gewichtete Werte: $k_i^{(in)} \hat{=} k_i^{(out)}$, $k_i^{(in)} = \sum_{j=1}^N a_{ij}$, $k_i^{(out)} = \sum_{j=1}^N a_{ji}$

mittlerer Grad $\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N k_i = \frac{2L}{N}$ ← ohne Selbstkopplung
 Bsp: $\langle k \rangle = \frac{1}{7} (1+3+3+3+5+2+4) = \frac{21}{7} = 3$

Konnektivität

$$= \int_0^{\infty} P(k) k dk$$

Gradverteilung: $p(k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten k Links hat



$$\sum_k p(k) = 1$$

$$p(1) = \frac{1}{7}, p(2) = \frac{1}{7}, p(3) = \frac{3}{7}, p(4) = \frac{1}{7}$$

$$p(5) = \frac{1}{7}$$

mittlere Grad = 1. Moment der Verteilung $p(k)$

Einschub: Momente

v -tes Moment: $M_v = \langle x^v \rangle = \frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} Z(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$ mit Momentenerzeugenden $Z(\alpha)$

$$Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{\alpha^v}{v!} M_v$$

Kumulant: $C_v = \langle x^v \rangle_c = \frac{\partial^v}{\partial \alpha^v} \Gamma(\alpha) \Big|_{\alpha=0}$ mit Kumulantenerzeugenden $\Gamma(\alpha)$

(additive für statistisch unabhängige Zufallsvariablen) $\Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle = \ln Z(\alpha)$

Kumulanten

1. Mittelwert $\langle x \rangle = \langle x \rangle_c$

1. Moment

2. Varianz $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle_c$

2. Moment - 1. Moment²

3. Skewness $\langle (\Delta x)^3 \rangle = \langle x^3 \rangle_c$

(Maß für Asymmetrie)

4. Kurtosis $\langle (\Delta x)^4 \rangle - 3(\langle (\Delta x)^2 \rangle)^2 = \langle x^4 \rangle_c$

(Wölbung, Spitzigkeit) $\lambda = \langle k \rangle = \langle k^2 \rangle$

Bsp.: Zufallsnetzwerke: $p(k) \approx e^{-\frac{k}{\lambda}}$ Poisson-Verteilung

→ Erdős-Rényi-Netzwerke (feste Wahrscheinlichkeit für jedes $\langle i, j \rangle$)

skalierbare Netzwerke $p(k) \sim k^{-\gamma}$ $\langle k^2 \rangle = \int_0^{\infty} p(k) k^2 dk \sim \int_0^{\infty} k^{-\gamma+2} dk$

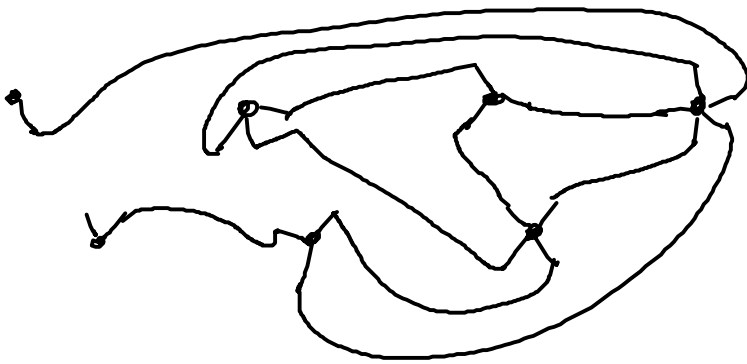
prezential attached liefert $\gamma=3 \Rightarrow \langle k^2 \rangle \rightarrow \infty$ linear für $\gamma \leq 3$

\Rightarrow typischer Knoten $\langle k \rangle \pm \infty$

Aufgabe: Strategien zum Entwerfen eines Netzwerks mit vorgegebener

Gradverteilung

k	1	2	3	4	5	...
p(k)	1/7	1/7	3/7	1/7	1/7	0...



Konfigurationsmodell:

- 1) Starte mit Klumpen k_i gemäß Verteilung
- 2) Verbinde offene Ende nach Belieben

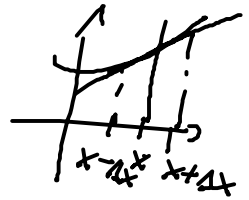
Gleiches $p(k)$, aber verschiedene Netzwerke als Ergebnis möglich

Laplace-Matrix (alternativ zu Adjazenz-Matrix)

$$A_{ij} = \left(\sum_j a_{ij} \right) \delta_{ij} - a_{ij} = \begin{cases} k_i & \text{für } i=j \\ -1 & \text{für } i \text{ und } j \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ggf. als invertierte Laplace-Matrix)

$$\begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ -\frac{1}{k_i k_j} & \text{für } i, j \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



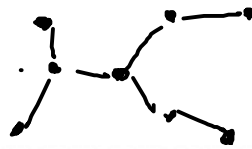
$$\frac{d f(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$$

Eigenwerte: $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{N-1} \leq 2$

$$\sum_{i,j=1}^N A_{ij} = 0$$

$$\mathbb{1} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichheit für bipartite Netzwerke



a. Undirected

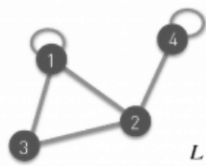


$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0, \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij}, \quad \langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

b. Self-loops



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\exists i, A_{ii} \neq 0, \quad A_{ij} = A_{ji}$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1, i \neq j}^N A_{ij} + \sum_{i=1}^N A_{ii} \quad ?$$

c. Multigraph (undirected)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

d. Directed



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



$$A_{ii} = 0$$

$$L = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N A_{ij}$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$



$$L = \sum_{i,j=1}^N A_{ij}$$

$$\langle k \rangle = \frac{L}{N}$$

e. Weighted
(undirected)



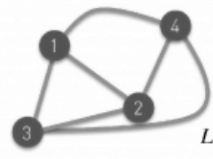
$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji}$$

$$\langle k \rangle = \frac{2L}{N}$$

f. Complete Graph
(undirected)



$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii} = 0$$

$$A_{ij} = A_{ji} = 1$$

$$L = L_{\max} = \frac{N(N-1)}{2}$$

$$\langle k \rangle = N - 1$$