English summary

3 Network topologies and models

3.1 Small-world networks

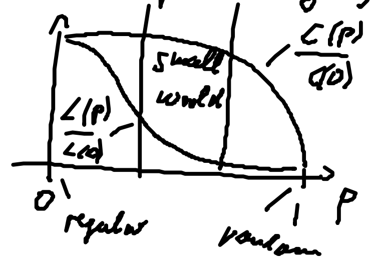
Properties (i) local structure/connectedness (high cluster coefficient)

(ii) short distance between nodes (small average shortest path lengths)

construction: Watts-Strogatz model

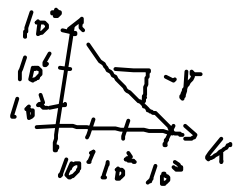
(1) start with regular ring network

(2) random rewiring of every link with probability p



3.2 Scale-free networks

power-law degree distribution: $p(k) \sim k^{-\gamma}$



construction: Barabasi-Albert model

(1) add nodes one by one with m stubs

(2) Connect stubs to existing nodes with probability $\frac{k_i}{\sum_j k_j}$

degree of node v_i added at time t_i: $k_i(t) = m\sqrt{\frac{t}{t_i}}$ $\left(\dot{k}_i(t) = \frac{k_i(t)}{2t}\right)$

Nachtrag zu 3.1 Small-world Netzwerke

2) zufällige Neuverdrahtung jedes Links mit Wahrscheinlichkeit p
(ohne Selbstkopplung, doppelte Verbindungen)

$\Rightarrow p\,\frac{N(2R)}{2}$ neue (langreichweitige) Verbindungen (#Links bleibt konstant)

$= \frac{pNk}{2}$ Grad jedes Knoten

$\Rightarrow$ durchschnittlicher Grad konstant

Grad Rückweite

$N = 20,\ k = 4 \quad R = 2$

Spezialfälle: $L(0) = \frac{N}{2K}$, $C(0) = \frac{3}{4}\,\frac{K-2}{K-1} \approx \frac{3}{4}$

$L(1) \approx \frac{\ln N}{\ln K}$ $\quad$ (durchschnittlicher Grad)$^{L} \approx N$

(durchschnittlicher Grad

$C(1) \approx \frac{K}{N}$

- Soziale Netzwerke:
  - Gemeinsamer Auftritt von Schauspielern in einem Film ($N = 225226$, $K = 61$)

durchschnittlicher Grad

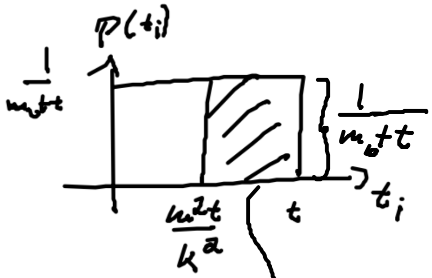
- Technologische Netzwerke:
  - Elektrische (Überland-)Leitungen ($N = 4941$, $K = 2.67$)
- Biologische Netzwerke:
  - Neuronales Netzwerk (*C. elegans*) ($N = 282$, $K = 14$)

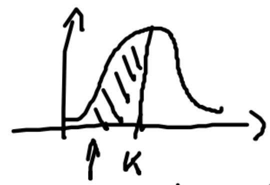
3.2 Skalenfreie Netzwerke (Fortsetzung)

Knoten v_i bei t_i hinzugefügt hat $k_i(t_i)=m$ Links

Wegen $k_i(t)=m\left(\frac{t}{t_i}\right)^{1/2}$ wissen wir: $t_i=\frac{tm^2}{k_i^2}$

Wahrscheinlichkeit für $k_i(t)<k$: $P(k_i(t)<k) = P\left(t_i>\frac{m^2t}{k^2}\right)$





$$P(k)=\frac{dP(k_i<k)}{dk}$$

$$P(k_i<k)=\int_0^k p(k')\,dk' \Rightarrow \frac{dP(k_i<k)}{dk}=p(k)-\overset{=0}{p(0)} = p(k)$$

$$P\left(t_i>\frac{m^2t}{k^2}\right) = \frac{1}{m_0+t}\left(t-\frac{m^2t}{k^2}\right)$$

Ableiten nach k liefert: $p(k)=\frac{\partial P(t_i>\frac{m^2t}{k^2})}{\partial k} = \frac{2m^2t}{k^3(m_0+t)} \sim k^{-3}$ auch für $t\to\infty$

Alternative Herleitung:

ein Knoten in jedem Zeitschritt dazu

#Knoten mit Grad k zum Zeitpunkt t: $\langle N(k,t)\rangle = \overset{N}{\underset{\downarrow}{}}\,t\,P(k,t)$

Gewinn/Verlustrechnung:

$$(N+1)P(k,t+1) = N P(k,t) + \underbrace{\frac{k-1}{2}P(k-1,t)}_{k-1\to k} - \underbrace{\frac{k}{2}P(k,t)}_{k\to k+1}$$

#Links, die Knoten mit Grad k durch neu hinzugefügten Knoten bekommen

$$\frac{k}{\underset{=\sum_j k_j}{2mt}}\, N P(k,t)\, \underset{\uparrow}{m} = \frac{k}{2}P(k,t)$$

#zu vergebener Links

Anfangsfall: $k=m$

neu eingefügter Knoten mit Startgrad m

$\downarrow$

$$(N+1)\,P(m,t+1) = N\,P(m,t) + 1 - \frac{m}{2}P(m,t)$$

mit $(N+1)\,P(k,t+1) - N\,P(k,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} (N+1)\,P(k) - N\,P(k) = P(k)$ folgt:

stationäres $p(k)$

Rekursionsformel

$$P(k) = \frac{k-1}{2}P(k-1) - \frac{k}{2}P(k) \quad \text{oder auch} \quad p(k) = \frac{k-1}{k+2}P(k-1) \qquad k>m$$

$$p(m) = \frac{2}{2+m} \qquad k=m$$

$$P(k) = \frac{k-1}{k+2}P(k-1) \quad \rightarrow \quad P(k+1) = \frac{k}{k+2}P(k)$$

$k \to k+1$ ersetzen

$$P(m) = \frac{2}{m+2}$$

$$P(m+1) = \frac{m}{m+3}P(m) = \frac{2m}{(m+2)(m+3)}$$

$$P(m+2) = \frac{m+1}{m+4}P(m+1) = \frac{2m(m+1)}{(m+2)(m+3)(m+4)}$$

$$P(m+3) = \frac{m+2}{m+5}P(m+2) = \frac{2m(m+1)}{(m+3)(m+4)(m+5)}$$

Zähler ändert sich nicht

$$p(m+4) = \frac{m+3}{m+6}p(m+3) = \frac{\cancel{m+3}}{m+6}\,\frac{2m(m+1)}{\cancel{(m+3)}(m+4)(m+5)} = \frac{2m(m+1)}{(m+4)(m+5)(m+6)}$$

Umschreiben mit $m+3 = k$ bei gleichem Zähler:

$$p(k) = \frac{2m(m+1)}{k(k+1)(k+2)} \sim \frac{1}{k^3}$$

Jetzt stimmt auch der Proportionalitätsfaktor und weitere Ordnungen

3.3 Zufallsnetzwerke

Idee: Konstruiere Netzwerke mit Wahrscheinlichkeit p für jeden möglichen Link.

Erdős-Rényi-Netzwerke (Publ. Math. Debrecen $\underline{6}$, 290 (1959))

(1) N Knoten

(2) Verknüpfe jeden Knoten mit möglichen Nachbarn gemäß fester Wahrscheinlichkeit p

Zusammenhang zwischen p und zu erwartender Anzahl von Links (mittlerem Grad

$$p = \frac{N\langle k\rangle}{2} \Big/ \frac{N(N-1)}{2} = \frac{\langle k\rangle}{N-1} \qquad (\langle k\rangle = p(N-1))$$

$\langle k\rangle$ = intensive Größe (2 Netzwerke mit mittlerem Grad $\langle k\rangle$ haben zusammen auch mittleren Grad $\langle k\rangle$)

etwa 2 getrennte Komponenten mit gleichem Grad

Clusterkoeffizient:

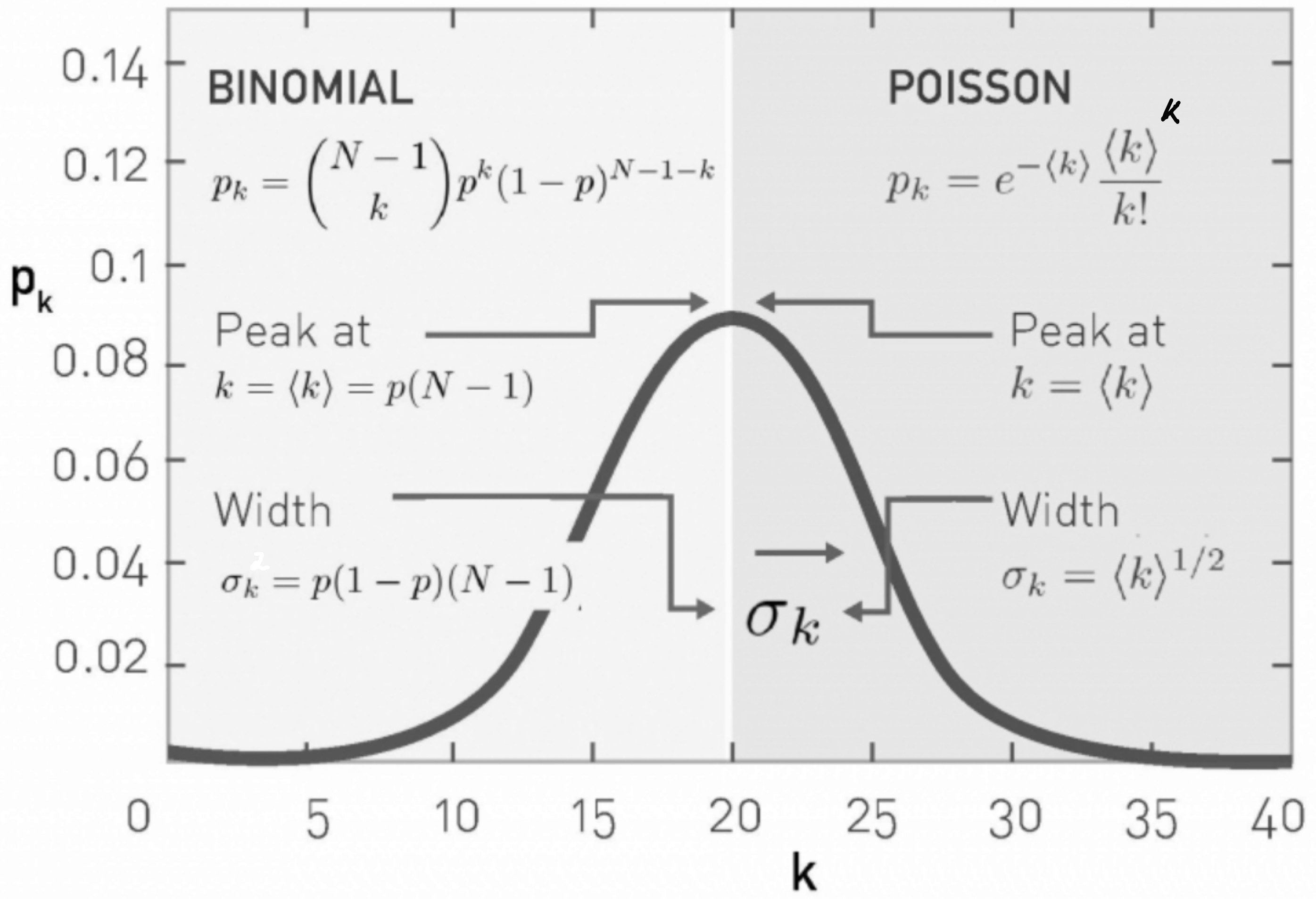
$$C_i = \frac{2\overset{\#\text{ verbundene Nachbarn}}{E_i}}{k_i(k_i-1)} \underset{\text{Zufallsnetzwerk}}{=} \frac{2\, p\, \frac{\langle k\rangle(\langle k\rangle-1)}{2}}{\langle k\rangle(\langle k\rangle-1)} = p = \frac{\langle k\rangle}{N-1}$$

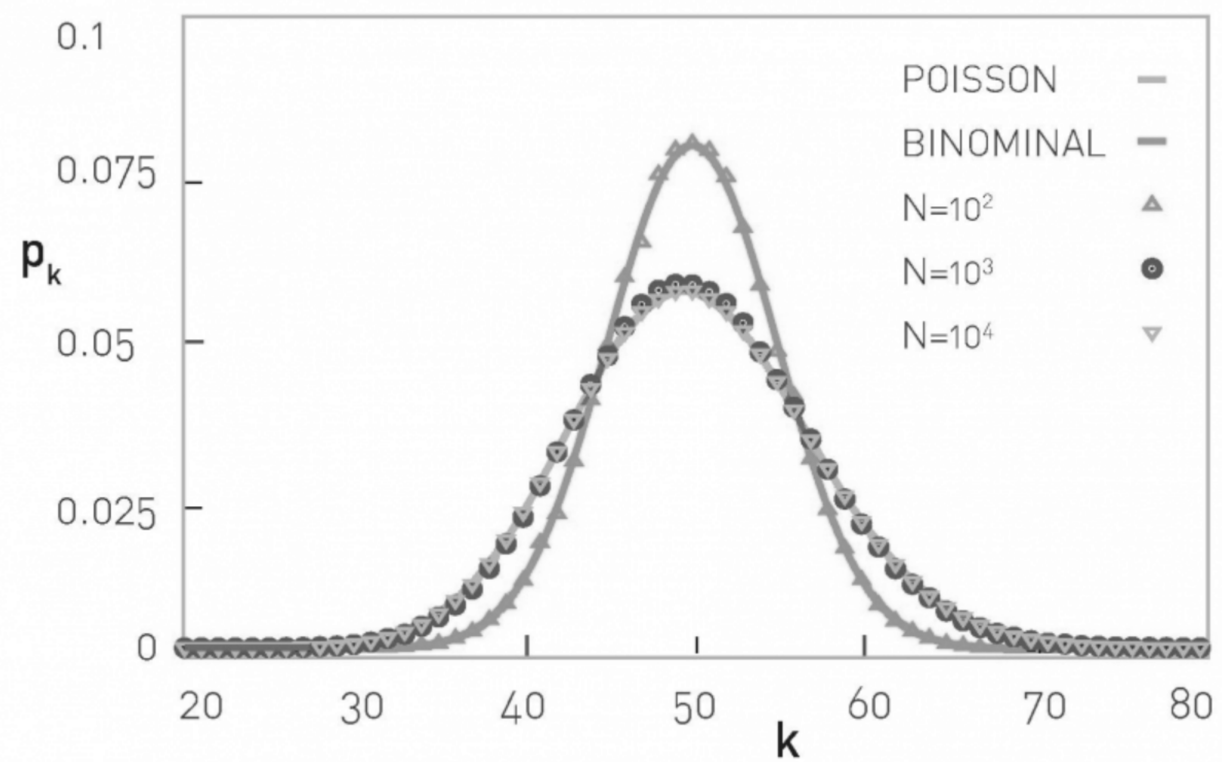
Gradverteilung:

$$P(k) = \underbrace{\binom{N-1}{k}}_{\text{Wähle }k\text{ Knoten aus potenziellen Nachbarn aus}} \underbrace{p^k}_{\text{Wahrscheinlichkeit, }k\text{ Nachbarn zu haben}} (1-p)^{\overbrace{N-1-k}^{\text{Wahrscheinlichkeit, mit verbliebenen }(N-1-k)\text{ Knoten keinen Link zu haben}}}$$

mittlerer Grad: $\langle k\rangle = \sum_k k\,P(k) = \ldots = p(N-1)$

Varianz: $\sigma^2 = (p(1-p)(N-1))$ (Vorsicht!)





Beobachtung:
Poisson-Verteilung ist gute Näherung für $\langle k \rangle << N$

$$P(k) = \binom{N-1}{k} p^k (1-p)^{N-1-k}$$

$N-k$

(i) $\binom{N-1}{k} = \frac{(N-1)!}{k!\,(N-1-k)!} = \frac{(N-1)(N-2)\cdot\ldots\cdot\overbrace{(N-1-k+1)}\,\cancel{(N-1-k)!}}{k!\;\cancel{(N-1-k)!}} \underset{N\gg k}{\approx} \frac{(N-1)^k}{k!}$

(ii) $\langle k\rangle = p(N-1)$

$$\ln\left[(1-p)^{N-1-k}\right] \stackrel{\downarrow}{=} (N-1-k)\ln\left(1-\frac{\langle k\rangle}{N-1}\right) \underset{\uparrow}{\approx} (N-1-k)\left(-\frac{\langle k\rangle}{N-1}\right) = -\langle k\rangle\underbrace{\left(1-\frac{k}{N-1}\right)}$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \boxed{\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \ldots} \qquad \underset{N\gg k}{\approx} -\langle k\rangle$$

$$\Rightarrow \quad (1-p)^{N-1-k} = e^{-\langle k\rangle}$$

alles zusammen liefert die Näherung für $N \gg k$:

$$p(k) \approx \frac{(N-1)^k}{k!}\,p^k\,e^{-\langle k\rangle} \underset{p=\frac{\langle k\rangle}{N-1}}{=} \frac{\cancel{(N-1)^k}}{k!}\,\frac{\langle k\rangle^k}{\cancel{(N-1)^k}}\,e^{-\langle k\rangle} = \frac{\langle k\rangle^k}{k!}\,e^{-\langle k\rangle}$$