English Summary

Networks are everywhere: social, physical/technological, biological context etc.

Examples from network science:

1) theory of scale-free networks (preferential attachment)

   (i) add nodes one by one with m stubs (open links)

   (ii) connect stubs to existing nodes according to their degree: high-degree nodes are more likely to receive new links

   ⇒ power-law degree distribution $p(k) \sim k^{-\gamma}$

   important for robustness of networks

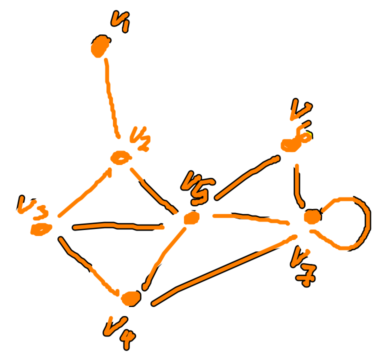
2) data/applications:

   a) disease spreading

   b) science of fake news

   c) outbreak containment

2 Netzwerkcharakteristika



Frage: Welche Kenngrößen beschreiben ein Netzwerk?

Was zeichnet ein Netzwerk aus?

Notation/Vokabular:

- Ein Netzwerk besteht aus Knoten v_i und Links e_{ij} als Verbindung zwischen v_i und v_j.

  ‖ Graph ——‖—— Vertices ——‖—— Kanten (edges) ——‖——

- Größe eines Netzwerks: Anzahl der Knoten $\#v_i = N$ (oben: $N=7$)

  Anzahl der Links $\#e_{ij} = L$ (oben: $L=11$)

- Topologie eines Netzwerks: v_i und v_j heißen benachbart, wenn es eine Kante e_{ij} von v_i nach v_j gibt mathematische Beschreibung durch Adjazenz-Matrix $\underline{\underline{A}} = \{a_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$

$a_{ij}=1$ wenn ein Link von v_j nach v_i existiert

$a_{ij}=0$ sonst

$\Rightarrow$ ungerichtetes Netzwerk $\hat{=}$ symmetrisches $\underline{\underline{A}}$

$a_{ij}=a_{ji}$

Bsp. von oben

$$\underline{\underline{A}} = \begin{array}{c|ccccccc} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}$$

Was mit wem?

← Selbstkopplung (self-loop)

gerichtete Netzwerke: $a_{ij} \neq a_{ji}$ wenn es keine reziproke/bidirektionale Verbindung gibt (entweder $v_i \to v_j$ oder $v_j \to v_i$)

Konvention (in der Vorlesung): $a_{ij} \hat{=} a_{i \leftarrow j}$ (siehe Lineare Algebra)

$\dot{\underline{x}} = \underline{\underline{A}}\,\underline{x}$

andere Konvention häufig in Graphentheorie

gewichtete Netzwerke: Matrix $\{w_{ij}\}_{i,j=1,\dots,N}$ mit $w_{ij} \in \mathbb{R}$ als Gewichte des Links $v_j \to v_i$

Grad eines Knoten k_i = # Nachbarn im Netzwerk

$$= \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$$

Bsp von oben: $k_1=1,\ k_2=3,\ k_3=3,\ k_4=3,\ k_5=5,\ k_6=2,\ k_7=4$

gerichtete Netzwerke: $k_i^{(in)} \overset{?}{=} k_i^{(out)}$, $k_i^{(in)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ij}$, $k_i^{(out)} = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}$

mittlerer Grad

Konnektivität

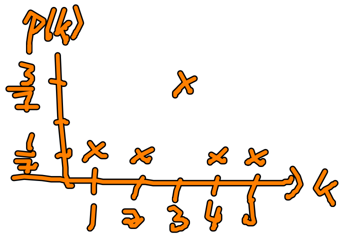
$$\langle k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} k_i = \frac{2L}{N}$$

← ohne Selbstkopplung $\frac{2L+2}{N}$

$$= \int_0^\infty p(k)\, k\, dk$$

Bsp: $\langle k \rangle = \frac{1}{7}(1+3+3+3+5+2+4) = \frac{21}{7} = 3$

Gradverteilung: $p(k)$ = Wahrscheinlichkeit, dass ein Knoten k Links hat



$\sum_k p(k) = 1$ $\quad p(1) = \frac{1}{7}$, $p(2) = \frac{1}{7}$, $p(3) = \frac{3}{7}$, $p(4) = \frac{1}{7}$, $p(5) = \frac{1}{7}$

mittlere Grad = 1. Moment der Verteilung $p(k)$

Einschub: Momente

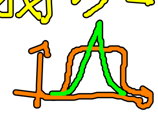
ν-tes Moment: $M_\nu = \langle x^\nu \rangle = \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} Z(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$ mit Momentenerzeugender $Z(\alpha)$

$$Z(\alpha) = \langle e^{\alpha x} \rangle = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\alpha^\nu}{\nu!} M_\nu$$

Kumulante: $C_\nu = \langle x^\nu \rangle_c = \frac{\partial^\nu}{\partial \alpha^\nu} \Gamma(\alpha)\Big|_{\alpha=0}$ mit Kumulantenerzeugenden $\Gamma(\alpha)$

(additiv für statistisch unabhängige Zufallsvariablen) $\quad \Gamma(\alpha) = \ln \langle e^{\alpha x} \rangle = \ln Z(\alpha)$

Kumulanten

1. Mittelwert $\langle x \rangle = \langle x \rangle_c$ — 1. Moment
2. Varianz $\langle (\Delta x)^2 \rangle = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle x^2 \rangle_c$ — 2. Moment − 1. Moment²
3. Skewness $\langle (\Delta x)^3 \rangle = \langle x^3 \rangle_c$
   (Maß für Asymmetrie) 
4. Kurtosis $\langle (\Delta x)^4 \rangle - 3 (\langle (\Delta x)^2 \rangle)^2 = \langle x^4 \rangle_c$
   (Wölbung, Spitzigkeit) 

Bsp.: Zufallsnetzwerke: $p(k) \approx e^{\overbrace{-\langle k \rangle}^{\lambda = \langle k \rangle = \langle k^2 \rangle}} \frac{\langle k \rangle^k}{k!}$ Poisson-Verteilung

→ Erdős-Rényi-Netzwerke (feste Wahrscheinlichkeit für jeden Link)

skalenfreie Netzwerke $p(k) \sim k^{-\gamma}$ $\quad \langle k^2 \rangle = \int_0^\infty p(k) k^2 \, dk \sim \underbrace{\int_0^\infty k^{-\gamma+2} \, dk}_{\text{divergiert für } \gamma \leq 3}$

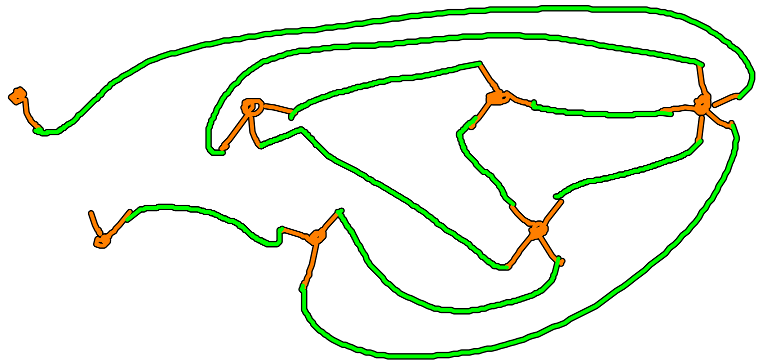
preferential attachment liefert $\gamma = 3 \Rightarrow \langle k^2 \rangle \to \infty$

$\Rightarrow$ typische Knoten $\langle k \rangle \neq \infty$

Aufgabe: Strategien zum Entwerfen eines Netzwerks mit vorgegebener

Gradverteilung

k	1	2	3	4	5	...
$p(k)$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0 ...



Konfigurationsmodell:

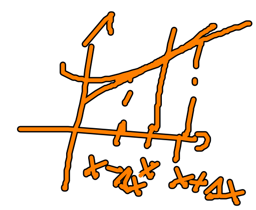
1) Starte mit Stümpfen k_i gemäß Verteilung
2) Verbinde offene Enden nach Belieben

Gleiches $p(k)$, aber verschiedene Netzwerke als Ergebnis möglich

Laplace-Matrix (alternative zur Adjazenz-Matrix)

$$\Lambda_{ij} = \Big(\sum_j a_{ij}\Big)\delta_{ij} - a_{ij} = \begin{cases} k_i & \text{für } i=j \\ -1 & \text{für } i \text{ und } j \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(ggf. als normierte Laplace-Matrix $\begin{cases} 1 & \text{für } i=j \\ -\frac{1}{\sqrt{k_i k_j}} & \text{für } i,j \text{ benachbart} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$)



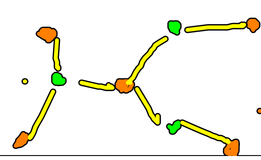
$$\frac{df(x)}{dx} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}, \quad \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \approx \frac{f(x+\Delta x) + f(x-\Delta x) - 2f(x)}{\Delta x^2}$$

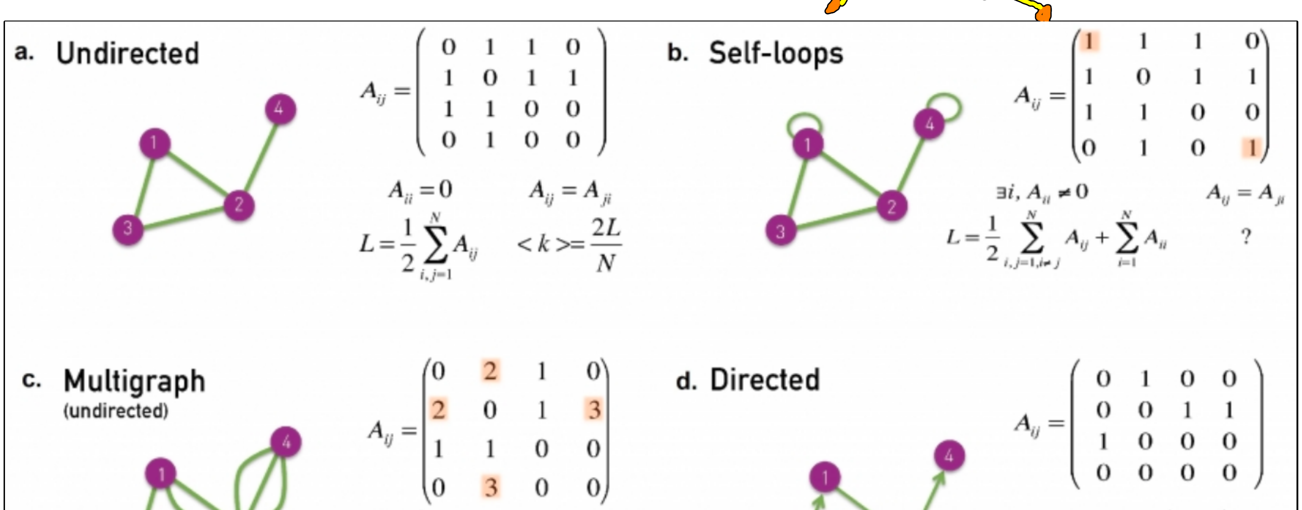
Eigenwerte: $0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_{N-1} \leq 2$

$\sum_{j=1}^{N} \Lambda_{ij} = 0$

$$\underline{\Lambda} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Gleichheit für bipartite Netzwerke





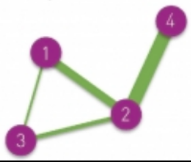
$$A_{ii}=0 \qquad A_{ij}=A_{ji}$$

$$L=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij} \qquad <k>=\frac{2L}{N}$$

$$A_{ij}\neq A_{ji}$$

$$L=\sum_{i,j=1}^{N}A_{ij} \qquad <k>=\frac{L}{N}$$

e. Weighted
(undirected)



$$A_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 0.5 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 4 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii}=0 \qquad A_{ij}=A_{ji}$$

$$<k>=\frac{2L}{N}$$

f. Complete Graph
(undirected)

$$A_{ij}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{ii}=0 \qquad A_{i\neq j}=1$$

$$L=L_{\max}=\frac{N(N-1)}{2} \qquad <k>=N-1$$