

English summary

3.3 Random networks (continued)

Emergence of giant connected component



real-world networks are not random and show a heavy tail in the degree distribution.

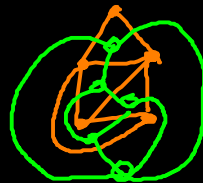
4. Graph theory

4.1 Euler's polyhedral formula

Def.: A graph G (set of vertices and edges) is called **planar**, if it can be embedded (drawn) in \mathbb{R}^2 without intersecting edges.

Euler's formula: For every connected, planar graph with N vertices, E edges and F faces, the following formula holds: $N - E + F = 2$

Proof by using duality: $G \leftrightarrow G^*$
 $N \leftrightarrow F^*$
 $E \leftrightarrow E^*$
 $F \leftrightarrow N^*$



Corollaries: Let G be a **simple** and planar graph. (no loops or multi-edges)

Then the following statements hold:

- (i) There exist a vertex of G with degree ≤ 5 at most.
- (ii) G has $3N - 6$ edges at most.
- (iii) If the edges of G are 2-colored, then there exists a cycle of G with 2 color changes at most in cyclic order of its edges.

4.2 Museumswächterproblem

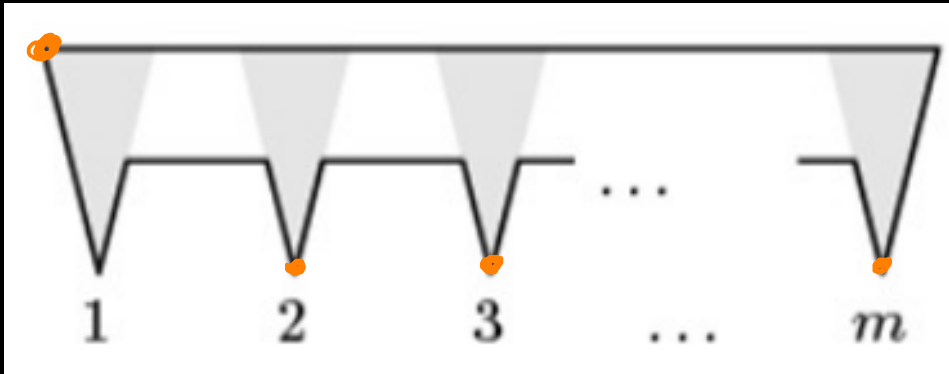
Frage: Wie viele Wächter werden höchstens benötigt, um ein Museum flächen-
deckend zu überwachen?

Bsp.: (i) konvexes G und v_{iss} :    $\# \text{Wächter} = 1$

(ii) beliebiger G und v_{iss} ?



Abb. 2: Weisman Art Museum, Minneapolis, USA [13]



$$\begin{aligned} \# \text{ Wächter} &= m \\ \# \text{ Wände} &= n = 3m \\ \# \text{ Kanten} &= \# \text{ Ecken} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} \# \text{ Wächter} &= m \\ \# \text{ Wände} &= n = 3m \\ \# \text{ Kanten} &= \# \text{ Ecken} \end{aligned}} \right\} \frac{n}{3} = m$$

Satz: Für jedes Museum mit n Wänden reichen $\lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ Wächter aus.

Beweis: Verbinde Ecken des Polygons (bzw. Museums) mit $n-3$ Diagonalen zu einer Triangulierung (ohne zusätzliche Ecken).

Zeige, dass der entstandene ebene Graph 3-färbbar ist.

benachbarte Knoten haben unterschiedliche Farbe

Fall $n=3$ trivial, weil konvexes Polygon (Dreieck)



$n \geq 4$: Wähle 2 Ecken u und v , die durch eine Diagonale verbunden werden können



Kante im Inneren

Teilung in kleinere Untergraphen, die nach Induktionsannahme 3-färbbar sind.

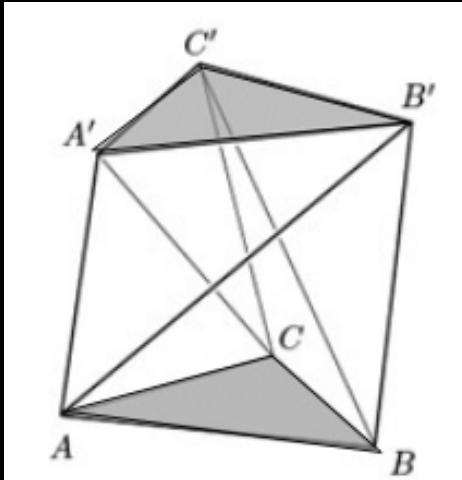
Sei Farbe $c(u) = 1$ und $c(v) = 2$.

\Rightarrow Zusammenkleben der Untergraphen durch evtl. Umfärbung eines Untergraphen.

Wähle eine Farbe aus und positioniere Wächter in entsprechenden Ecken.

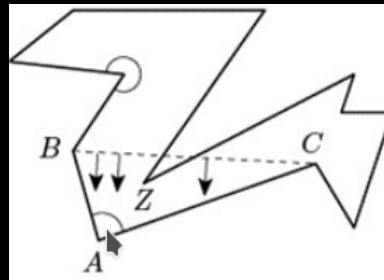
Annahme im Beweis: Triangulierung ist immer möglich.

Gilt schon in \mathbb{R}^3 nicht mehr für 3D-Polyeder und Zerlegung in Tetraeder ohne zusätzliche Ecken/Kanten.



Schönhardt-Polyeder

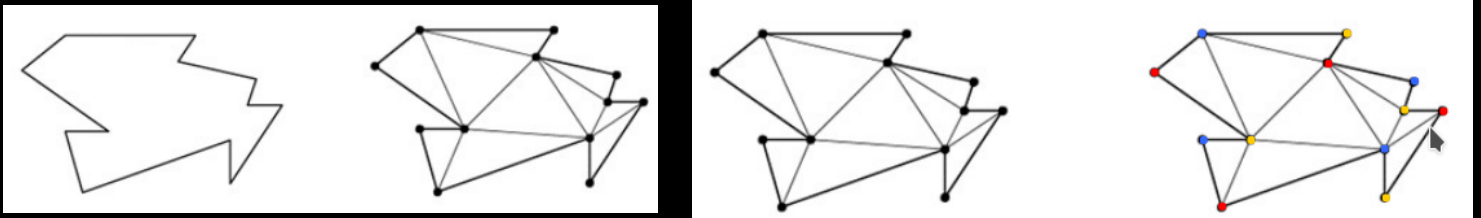
Aber in 2D geht's für ebene Polygone.



Starte mit Ecke mit spitzen Winkel.

(i) Nachbarn können durch Diagonale verbunden werden.

oder (ii) Es gibt einen untersten Punkt z zur Bildung einer Diagonale.



1. Die Wandwächter (G. Toussaint)

Definition. Ein Wandwächter ist ein Wächter, der an einer Wand des Museums entlang läuft, und alles überwacht, was von irgendeinem Punkt der Wand aus zu sehen ist.

Frage. Wie viele solche „Wandwächter“ brauchen wir, um das gesamte Museum zu überwachen?

Antwort.

- I.A. können $\lfloor n/3 \rfloor$ Wächter nötig sein (siehe Abb.)
- Vermutung: Diese Anzahl reicht auch aus (außer für einige kleine Werte von n). Ein Beweis ist nicht in Sicht.

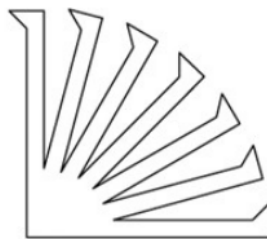


Abb. 9: Dieses Polygon hat $n = 28$ Seiten/Ecken (und 4m Seiten i.a. Fall).^[1]

4.3 Satz von Tutte

Keine Schleifen oder doppelte Kanten

Sei G ein einfacher Graph, der keine K_5 enthält.

\rightarrow Knoten vollständig verbunden



Frage: Wie viele Kanten kann G höchstens haben?

Satz: Wenn ein Graph $G = (V, E)$ mit n Ecken keine P -Clique hat,

dann gilt ($P \geq 2$): $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{P-1}\right) \frac{n^2}{2}$

#Kanten = L

$P=2$: $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{2-1}\right) \frac{n^2}{2} = 0$ 2-Clique

\Rightarrow keine Kante

$P=3$: $|E| \leq \left(1 - \frac{1}{3-1}\right) \frac{n^2}{2} = \frac{n^2}{4}$ 3-Clique

\Rightarrow Ein dreiecksfreier Graph mit n Ecken hat höchstens $\frac{n^2}{4}$ Kanten.

Beweis: k_i : Grad von Ecke $i \Rightarrow \sum_{i \in V} k_i = 2|E|$

Sei (i, j) eine Kante: Da G keine Dreiecke enthält, haben i und j keine gemeinsamen Nachbarn. $k_i + k_j \leq n$

k_i tritt genau k_i mal auf (alle k_i Kanten die i berühren)

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{(i,j) \in E} k_i + k_j \leq n|E| \\ \sum_{i \in V} k_i^2 \end{array} \right\} n|E| \geq \sum_{i \in V} k_i^2 \geq \frac{\left(\sum_{i \in V} k_i\right)^2}{n}$$

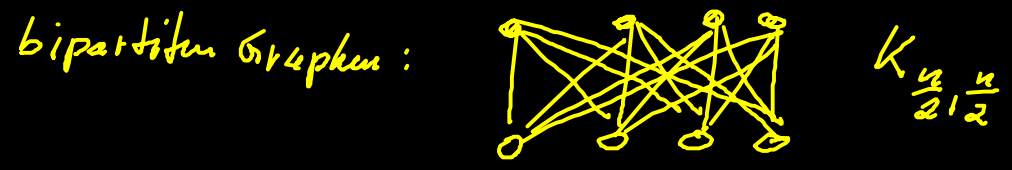
Ungleichung von Cauchy

$$\leq (a_1 \dots a_n)^2 \leq |a_1|^2 |a_2|^2 \dots |a_n|^2$$

\uparrow \uparrow

(k_1, \dots, k_n) $(1, \dots, 1)$

$\Rightarrow n|E| \geq \frac{\left(\sum_{i \in V} k_i\right)^2}{n} = \frac{4|E|^2}{n}$ oder $\frac{n^2}{4} \geq |E|$



allgemeines Fall: $n \leq P-1$ trivial (keine P -Clique möglich)

$$|E| \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{(p-1)^2}{2} = \frac{p-1}{2}$$

$n \geq p$: Sei G ein Graph mit maximaler Kantenanzahl ohne p -Clique

$\Rightarrow G$ hat $(p-1)$ -Clique (sonst K könnte noch Kanten hinzugefügt werden). $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ Knotenmenge

Sei A eine $(p-1)$ -Clique und $B = V \setminus A$

$$\# \text{Kanten in } A = \binom{p-1}{2}$$

Abschätzung von Kanten $e_{A,B}$ zwischen A und B und e_B innerhalb von B

$$(i) e_B \leq \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{[n-(p-1)]^2}{2}$$

(ii) $e_{A,B} \leq (p-2)(n-p+1)$ sonst gäbe es eine p -Clique $A \cup$ Knoten, der mit allen Knoten in A verbunden ist

$$|E| \leq \binom{p-1}{2} + \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) \frac{(n-p+1)^2}{2} + (p-2)(n-p+1)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{p-1}\right) n^2$$