4. Übung zu Complex Networks

Gitter als Spezialfälle von k-regulären Netzwerken

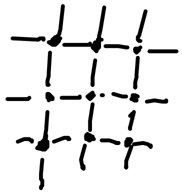
1D: Kette

$(k=2)$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

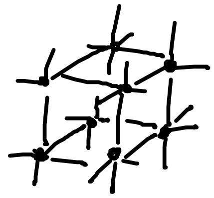
Ring

2D: Gitter



$(k=4)$

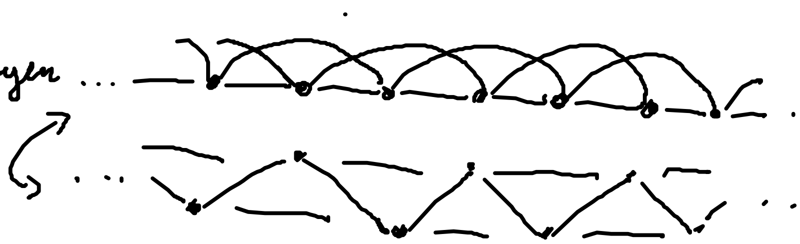
3D: Kristall



$(k=6)$

Siehe auch Theoretische Festkörperphysik

weitere Verallgemeinerungen



$k=4$

Für einfache/symmetrische Netzwerke gibt es Hoffnung, manche Netzwerkeigenschaften explizit ausrechnen zu können

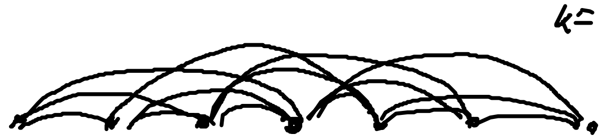
Clusterkoeffizient von Gittern: zunächst 1D mit k Nachbarn für jeden Knoten

alle Knoten gleich

$$C \overset{\downarrow}{=} C_i = \frac{\#\,\text{verbundenen Nachbarpaare}}{\#\,\text{Nachbarpaare}} = \frac{3}{4}\,\frac{k-2}{k-1} \xrightarrow[k\to\infty]{} \frac{3}{4}$$

$k=6$

$$\#\text{Nachbarpaare} = \frac{k(k-1)}{2}$$



$\#$verbundenen Nachbarpaare links von v_i:

$$\sum_{n=1}^{\frac{k}{2}-1} n = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{2}-1\right)\left(\frac{k}{2}-1+1\right) = \frac{k}{4}\left(\frac{k}{2}-1\right)$$

——— " ——— rechts von v_i: $\sum_{n=1}^{\frac{k}{2}-1} n = \frac{k}{4}\left(\frac{k}{2}-1\right)$

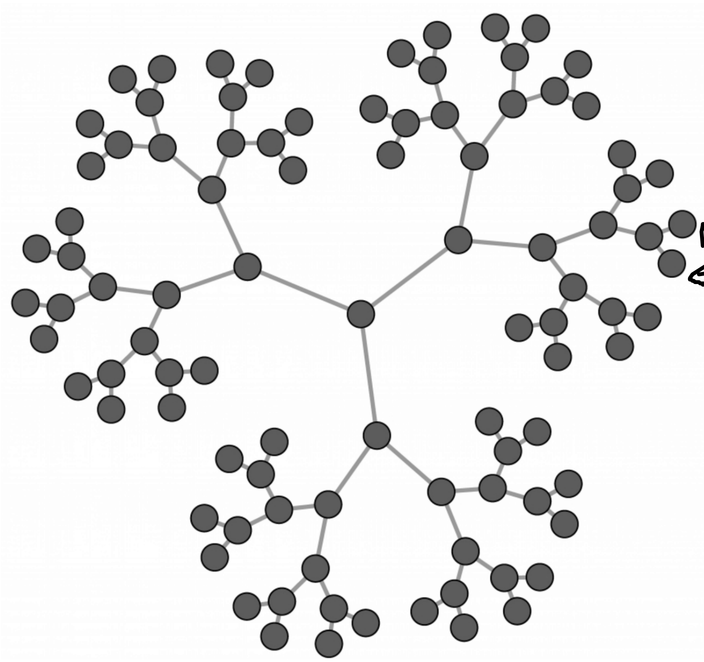
$\#$ verbundene Nachbarpaare über v_i hinweg:

$$\left.\begin{aligned} \frac{k}{2}-1 &\Rightarrow 1 \\ \frac{k}{2}-2 &\Rightarrow 2 \\ &\vdots \\ \frac{k}{2}-\frac{k}{2}+1 &\Rightarrow \frac{k}{2}-1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{k}{4}\left(\frac{k}{2}-1\right)$$

zusammengefasst: $$C = \frac{3\,\frac{k}{4}\left(\frac{k}{2}-1\right)}{\frac{k(k-1)}{2}} = \frac{3\,(k-2)}{4\,(k-1)}$$

analog in d Dimensionen: $$C_d = \frac{3}{4}\,\frac{\frac{k}{d}-2}{\frac{k}{d}-1} = \frac{3}{4}\,\frac{k-2d}{k-d}$$

weitere reguläre Netzwerke: Cayley-Bäume



hier: $k=3$, Anzahl der Iterationen $d=5$

abschließende Knoten heißen Blätter

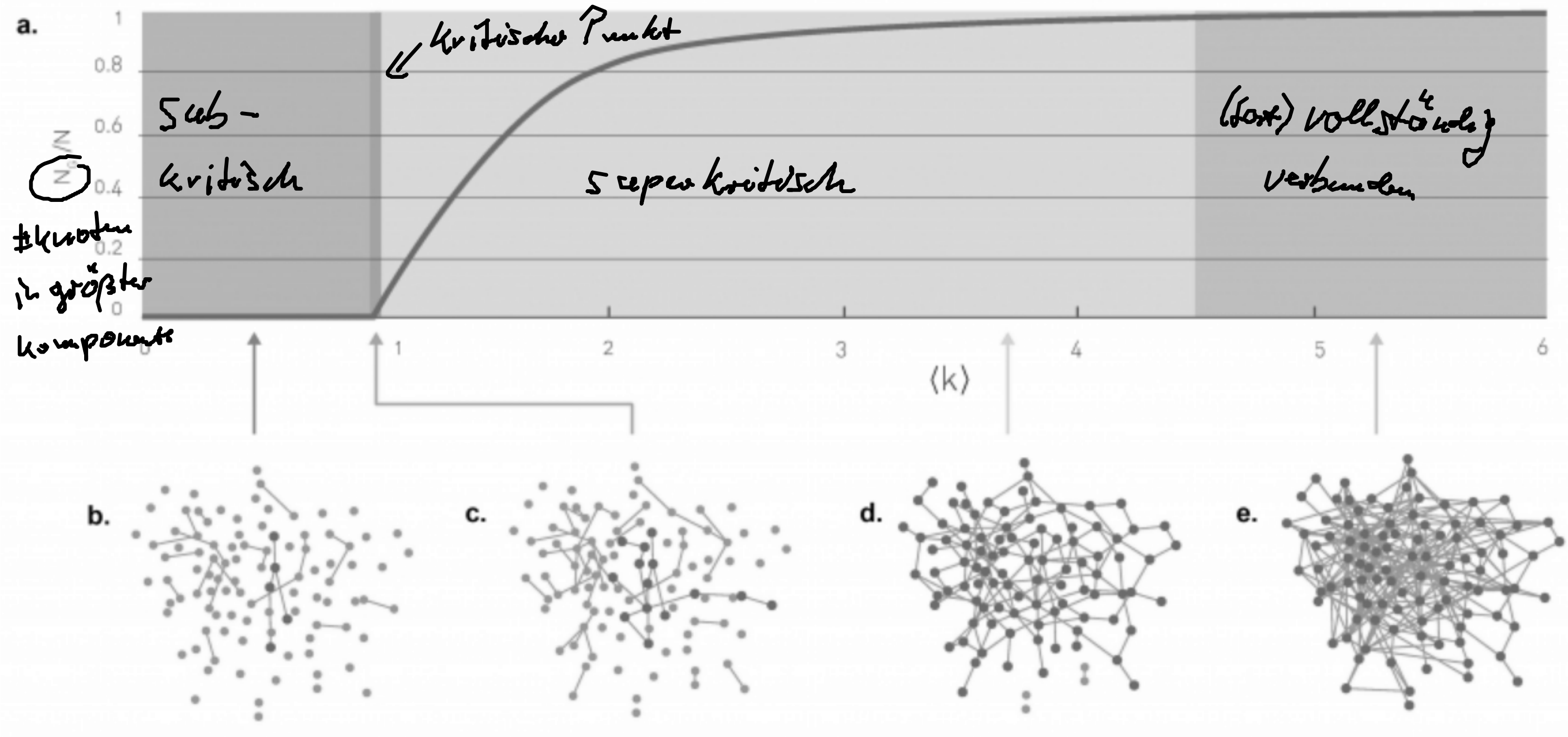
$k=1$

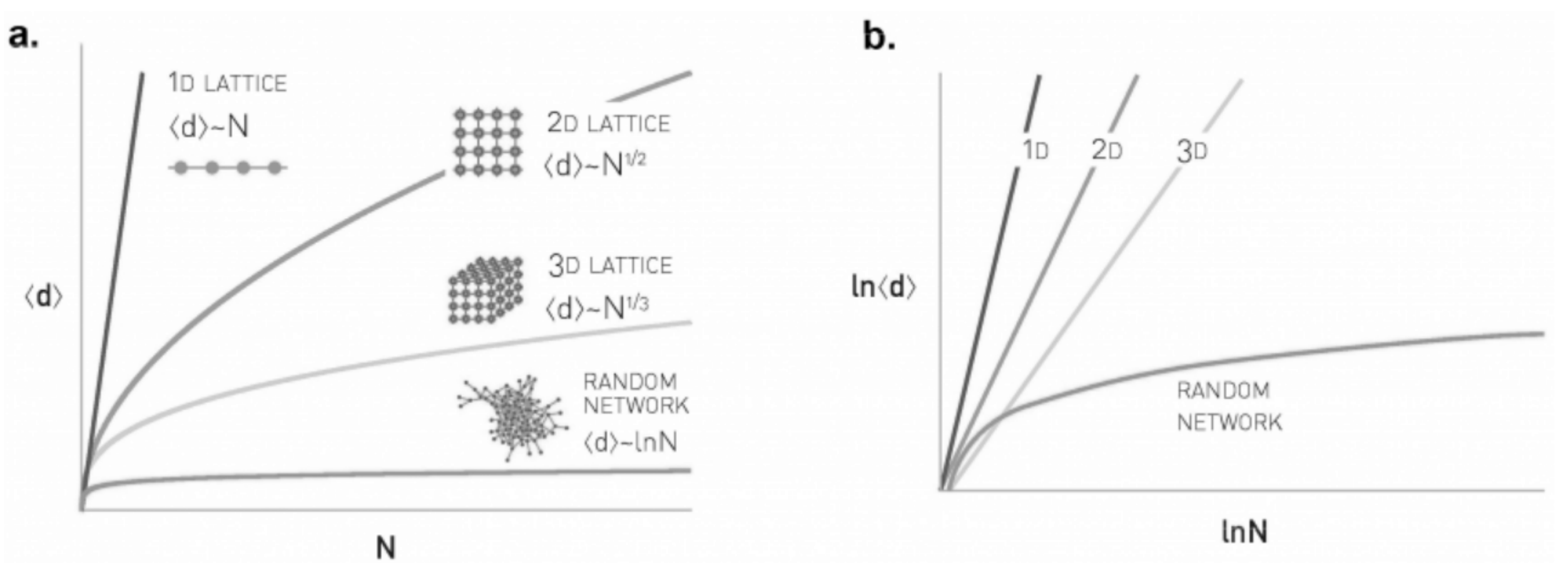
Clusterkoeffizient $=0$

Zufallsnetzwerke: N Knoten mit Wahrscheinlichkeit p, dass 2 Knoten verbunden sind. (Jeder Link existiert mit Wahrscheinlichkeit p

mittlerer Grad: $\langle k \rangle = p\,(N-1)$

mittlere Anzahl von Links: $\langle L \rangle = p\,\frac{N(N-1)}{2} = \frac{\langle k \rangle N}{2}$





Durchmesser in Zufallsnetzwerken: $d_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k \rangle}$

\# Knoten im Abstand 1 : $\langle k \rangle$ im Mittel

\# Knoten im Abstand 2 : $\langle k \rangle^2$ (dünnes Netzwerk: jeder der $\langle k \rangle$ Nachbarn hat $\langle k \rangle$ neue/andere Nachbarn

:

#Knoten im Abstand d: $\langle k\rangle^{d}$

$$\sum_{n=0}^{d} a x^{n} = a\,\frac{1-x^{d+1}}{1-x}$$

Zusammenfassen: #Knoten bis zum Abstand d

$$N(d) \approx 1 + \langle k\rangle + \langle k\rangle^{2} + \dots + \langle k\rangle^{d} = \frac{\langle k\rangle^{d+1}-1}{\langle k\rangle - 1} \xrightarrow[\langle k\rangle \gg 1]{} \langle k\rangle^{d}$$

$N(d_{max}) \overset{!}{=} N$ mit $\langle k\rangle$ groß $N \approx \langle k\rangle^{d_{max}}$

$$d_{max} \approx \frac{\ln N}{\ln \langle k\rangle}$$