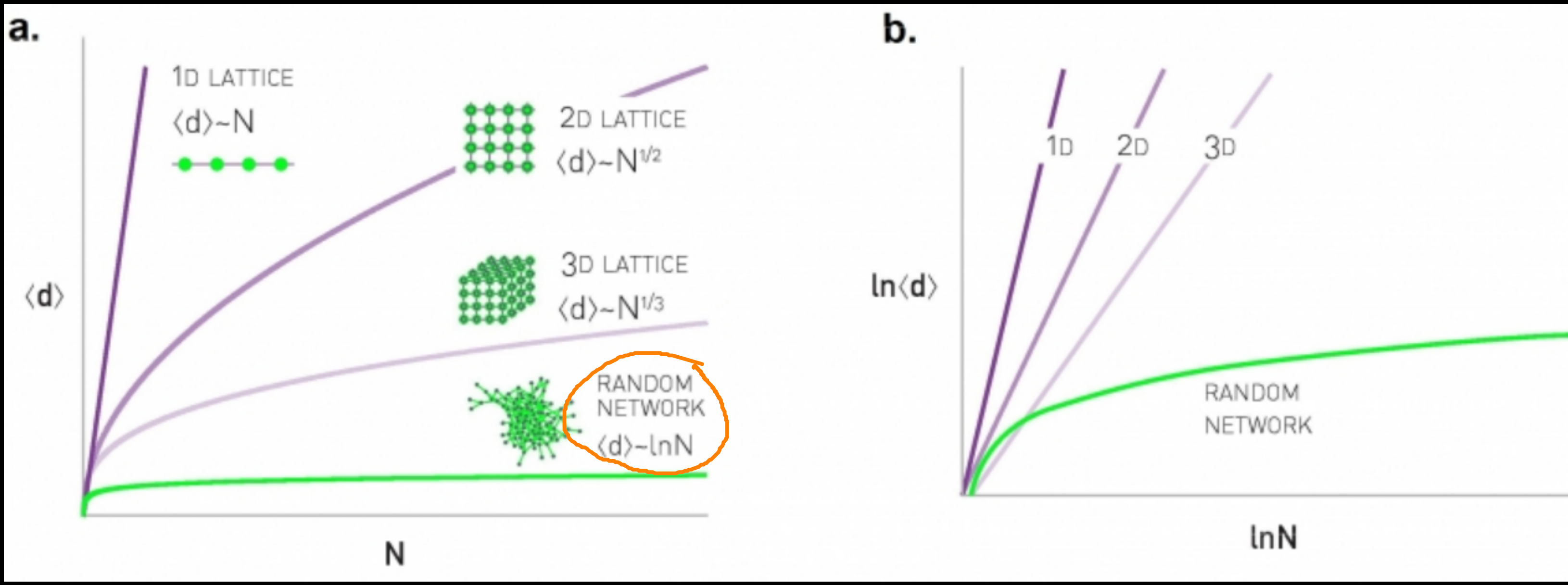
6. Übung zu Complex Networks

Aufgabe 6.3:



Aufgabe 7:

Network	N	L	‹k›	‹d›	d_{max}
Internet	192,244	609,066	6.34	6.98	26
WWW	325,729	1,497,134	4.60	11.27	93
Power Grid	4,941	6,594	2.67	18.99	46
Mobile-Phone Calls	36,595	91,826	2.51	11.72	39
Email	57,194	103,731	1.81	5.88	18
Science Collaboration	23,133	93,437	8.08	5.35	15
Actor Network	702,388	29,397,908	83.71	3.91	14
Citation Network	449,673	4,707,958	10.43	11.21	42
E. Coli Metabolism	1,039	5,802	5.58	2.98	8
Protein Interactions	2,018	2,930	2.90	5.61	14

z.B. mit NetworkX-Routine info(G) ⟹ liefert N, L und $\langle k\rangle = \frac{2L}{N}$

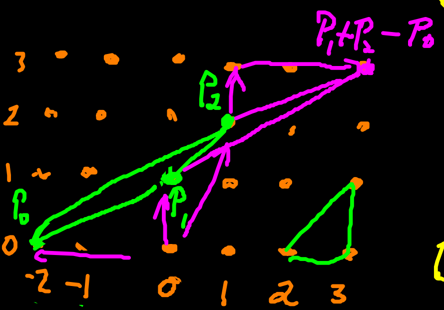
Satz von Pick:

jeder Innenwinkel < 180°

konvex

nicht konvex

Ein konvexes Polygon $P \subseteq \mathbb{R}^2$ heißt elementar, wenn die Ecken ganzzahlig sind, es aber keine weiteren ganzzahligen Punkte enthält. (weder auf dem Rand noch im Innern)



Lemma: Jedes elementare Dreieck $\Delta = \operatorname{conv}\{P_0, P_1, P_2\}$ hat die Fläche $A(\Delta) = \frac{1}{2}$.

konvexe Hülle

Beweis: Erweiterung von Δ zu Parallelogramm

$$\operatorname{conv}\{P_0, P_1, P_2, P_1+P_2-P_0\} = P = \Delta \cup \nabla(\Delta)$$

$\nabla: X \longmapsto P_1 + P_2 - X$. Beobachtung: P ist auch elementar.

Ganzzahlige Verschiebungen / Translate von P überdecken $\mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow \{P_1-P_0, P_2-P_0\}$ ist eine Basis mit Determinante $=1$

$$\left|\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)\right| = \left|\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right| = 1.$$

Es existiert eine umkehrbare Abbildung $\underline{\underline{Q}}$ ganzzahlige

für den Basiswechsel $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\underline{\underline{Q}}$ ← oder jede andere ONB mit $|\det Q| = 1$ (wegen $\underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^{-1} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$, $\det \underline{\underline{Q}}\,\underline{\underline{Q}}^{-1} = \det\underline{\underline{Q}}\det\underline{\underline{Q}}^{-1} = 1$)

Determinante der neuen Basis $\left|\det\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\right| = \left|\det\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\underline{\underline{Q}}\right)\right|$

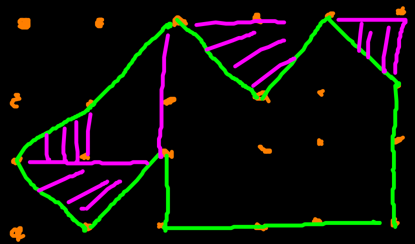
$$= \left|\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\det\underline{\underline{Q}}\right| = |\det\underline{\underline{Q}}| = 1$$

$\Rightarrow$ Fläche von Parallelogramm P: $A(P) = 1 \Rightarrow A(\Delta) = \frac{1}{2}$

Satz von Pick:

Die Fläche eines Polygons $Q \subseteq \mathbb{R}^2$ mit ganzzahligen Ecken ist durch

$A(Q) = n_{in} + \frac{1}{2}n_{rd} - 1$ gegeben, wobei n_{in} und n_{rd} die Anzahl ganzzahliger Punkte innerhalb bzw. auf dem Rand von Q sind.



$$\left.\begin{array}{l} n_{in} = 5 \\ n_{rd} = 13 \end{array}\right\} \; A(Q) = 5 + \frac{13}{2} - 1 = 10{,}5$$

Beweis: Idee: Triangulierung von Q mit allen Punkten im Innern oder auf dem Rand.

Betrachte diese Triangulierung als ebenen Graphen mit 1 unbegrenzten Außengebiet und $f-1$ Dreiecken der Fläche $\frac{1}{2}$: $A(Q) = \frac{1}{2}(f-1)$

Jedes Dreieck hat 3 Seiten, wobei e_{in} (Kante im Innern) 2 Dreiecke begrenzt und e_{rd} (Kante auf dem Rand) 1 Dreieck begrenzt.

Anzahl der Kanten: $3(f-1) = 2e_{in} + e_{rd}$. Außerdem: $e_{rd} = n_{rd}$

$$3(f-1) = 3f - 3 = 2e_{in} + e_{rd} \qquad e = e_{rd} + e_{in} \Rightarrow e_{in} = e - e_{rd}$$

$$\Rightarrow f = 2(e_{in} - f) + e_{rd} + 3 \stackrel{\downarrow}{=} 2(e-f) + e_{rd} - 2e_{rd} + 3$$

$$= 2(e-f) - e_{rd} + 3 \stackrel{e_{rd} = n_{rd}}{=} 2(e-f) - n_{rd} + 3$$

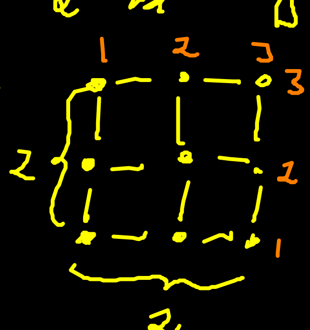
$$\stackrel{n-e+f=2}{=} 2(n-2) - n_{rd} + 3 = 2(n_{in} + n_{rd}) - n_{rd} - 1$$

$$= 2n_{in} + n_{rd} - 1$$

$$A(Q) = \frac{1}{2}(f-1) = \frac{1}{2}(2n_{in} + n_{rd} - 2)$$

$$= n_{in} + \frac{1}{2} n_{rd} - 1 \qquad \square$$

Gittergraph: $Q_{3,3} \;\hat{=}$



$$|E| = 2nm - n - m$$

$$= 2 \cdot 3 \cdot 3 - 3 - 3 = 12$$

Knoten im Innern haben Grad 4 $\qquad nm - 2m - 2(n-2)$

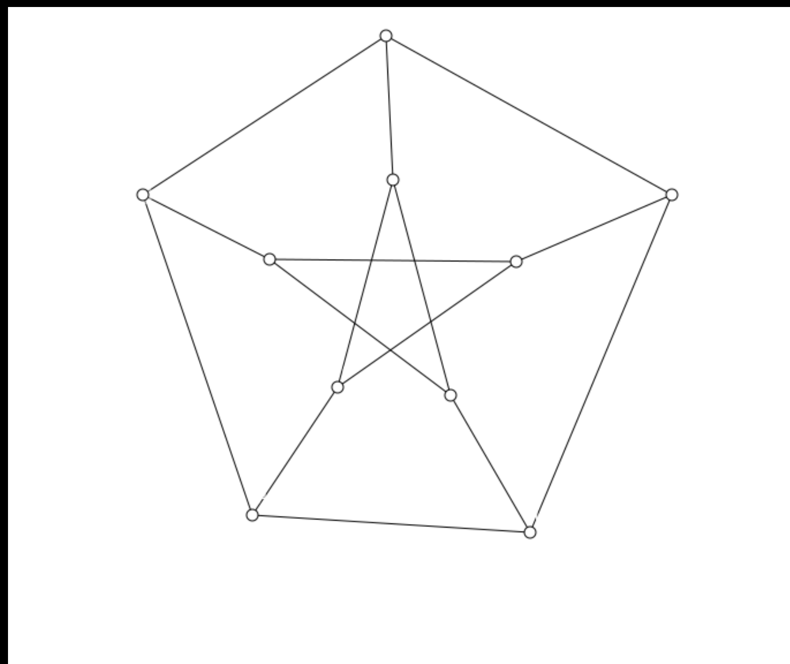
Knoten als Ecke $\{(1,1),(1,m),(n,1),(n,m)\}$ haben Grad 2 $\quad 4$

Restliche Randknoten haben Grad 3. $\quad 2(m-2)+2(n-2)$

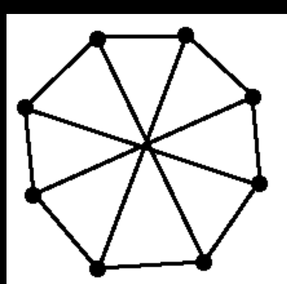
$$\sum_{n,m} k_{n,m} = 2|E| = 4\big(nm - 2m - 2(n-2)\big) + 4\cdot 2 + 3\big(2(m-2)+2(n-2)\big)$$

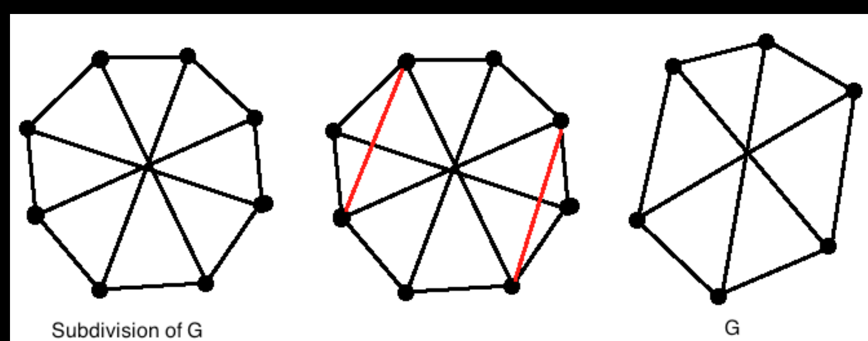
$$= 4nm - 2n - 2m \quad \Rightarrow \quad |E| = 2nm - n - m$$

Petersen-Graph:

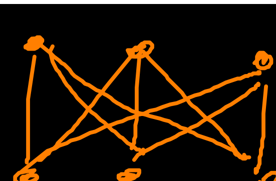


Untergraph:





$K_{3,3}$



Nachtrag/Ergänzung zur excess degree distribution:

excess degree $e_i = n \Rightarrow$ Grad von Knoten i: $k_i = n+1$

$k_i = 4,\ e_i = 3$

$$P_{n=e} = q_n = \frac{(n+1)\,P_{k=n+1}}{\langle k\rangle} \qquad q_k = \frac{(k+1)\,P_{k+1}}{\langle k\rangle}$$

Wkeit für Grad k

Wahrscheinlichkeit für exzessdegree k

Jeder ebene Graph ist 6 färbbar: Induktion über Anzahl der Ecken.
(Knoten)

$n = 5, 6$: trivial

$n > 6$: Wir wissen: Jeder ebene Graph hat eine Ecke vom Grad höchstens 5.
Entferne diese Ecke und es bleiben noch $n-1$ übrig.
Die entfernte Ecke erhält eine von ihren Nachbarn unterschiedliche Farbe.