

English Summary

1.3 Robustness of networks (continued)

- removal of nodes: random vs. scale-free network, random vs. targeted attacks
- \Rightarrow critical fraction of removed nodes
- \Rightarrow scale-free networks:
 - + robust against random removal
 - sensitive against targeted removal

1.4 Small-world networks

- transition from regular ring to random networks by rewiring
- small-world property:
 - (i) low average shortest path length \leftarrow # links between 2 nodes
 - (ii) high global clustering coefficient \leftarrow $\frac{\text{\# links between friends}}{\text{\# possible links}}$
- application to spreading processes:
 - \rightarrow (average) shortest path $\hat{=}$ worst-case scenario / infection route
 - \rightarrow random network structure facilitates spreading due to shortcuts

2 Mathematische Modelle der Krankheitsausbreitung

2.1 SIR-Modell (vgl. Kap 1.) + lineare Stabilitätsanalyse

Anteile von S, I oder R an der Gesamtpopulation

$$\dot{S} = -\beta SI, \quad \dot{I} = \beta SI - \gamma I, \quad \dot{R} = \gamma I, \quad S + I + R = 1$$

Herleitung unter der Annahme einer homogenen Durchmischung:
(jeder Kontakt hat die gleiche Wahrscheinlichkeit)

- (i) 1 Suszeptibler hat durchschnittlich k Kontakte pro Zeiteinheit
- (ii) Davon ist der Anteil $I = \frac{Y}{N}$ infektiv ($Y = \#$ Infizierte, $N = \#$ Population)
- \Rightarrow im Intervall $[t, t+dt]$ besteht Kontakt zu $k \frac{Y}{N} dt$ Infizierten
- (iii) Definiere c als Wahrscheinlichkeit einer Übertragung / Ansteckung eines Kontaktes:

\Rightarrow $(1-c)$ ———— n ———— keiner

\Rightarrow Wahrscheinlichkeit keiner Übertragung bei $k \frac{Y}{N} dt$ Kontakten:

$$(1-q) = (1-c)^{k \frac{Y}{N} dt} \Rightarrow \beta = -k \log(1-c) \quad q = 1 - \exp[-\beta Y dt / N]$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad q = 1 - \left(1 - \beta Y dt / N + \dots\right) \xrightarrow{dt \rightarrow 0} \frac{dq}{dt} = +\beta \frac{Y}{N}$$

Übertragungsrate pro Suszeptiblen
(„Infektionskraft“)

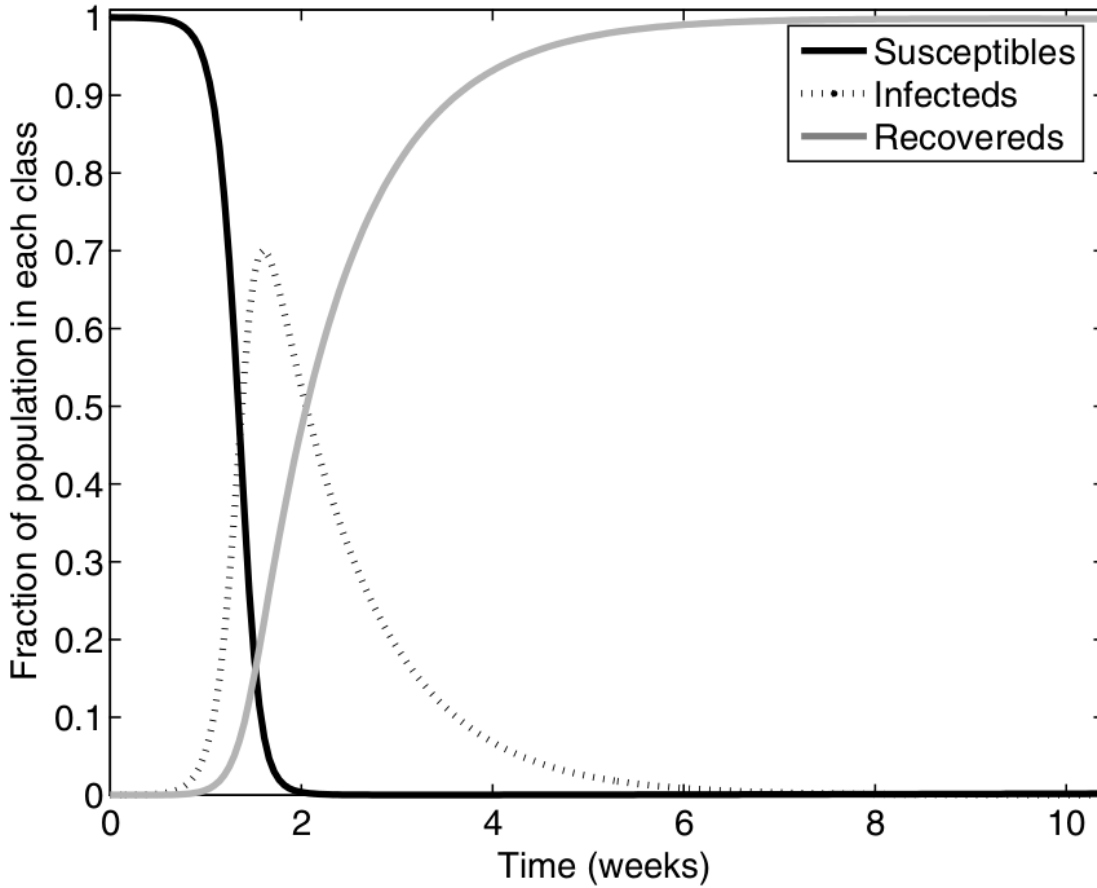
(iv) Bezogen auf X Suszeptible in der Gesamtpopulation:

$$\frac{dX}{dt} = -\beta X \frac{Y}{N} \Rightarrow S = \frac{X}{N}, I = \frac{Y}{N} \quad \frac{dS}{dt} = -\beta SI \quad \left(\begin{array}{l} \text{Abnahme der Suszeptiblen} \\ \text{Zunahme der Infizierten} \end{array} \right)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI - \gamma I$$

"Frequenzabhängiges SIR-Modell" (unabhängig von Populationsgröße R_0)

Vgl. $\frac{dX}{dt} = -\beta X Y$, dichteabhängiges SIR-Modell



$$\left. \begin{aligned} \beta &= 5 \text{ d}^{-1} \\ \frac{1}{\gamma} &= 7 \text{ d} \end{aligned} \right\} R_0 \approx 10$$

asymptotisches Verhalten $\left. \begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -\beta S I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I \end{aligned} \right\} \frac{dS}{dR} = -\frac{\beta S}{\gamma} = -R_0 S$

\Rightarrow Lösung: $S(R(t)) = S(0) e^{-R_0 R(t)}$ für $R(0) = 0$

$\Rightarrow S(t) > 0$, weil $e^{-R_0 R(t)} > 0$ Rest der Suszeptiblen

$S(t \rightarrow \infty) = 1 - R(\infty) = S(0) e^{-R_0 R(\infty)} \Rightarrow 1 - R(\infty) - e^{-R_0 R(\infty)} = 0$
 $I(0) = 0$ $S(0) \approx 1$ (transzendente Gleichung)

Lösen von $\frac{dR}{dt} = \gamma I = \gamma(1 - R - S)$

$= \gamma(1 - R - S(0) e^{-R_0 R})$

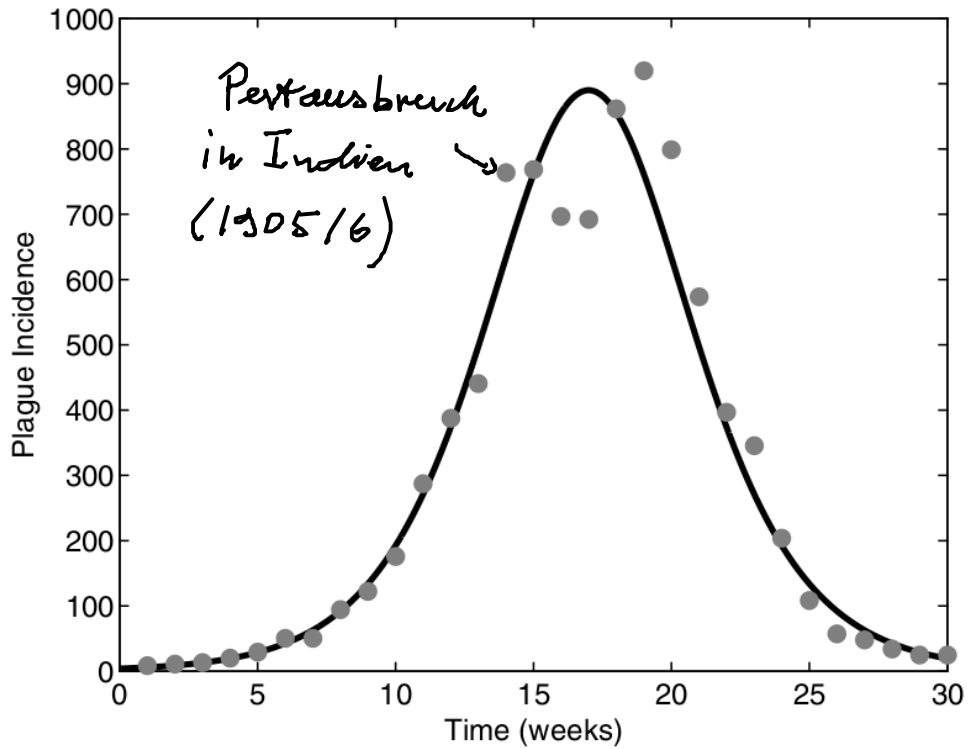
$\approx \gamma \left[1 - S(0) + (S(0) R_0 (-1)) R - \frac{S(0) R_0^2}{2} R^2 \right]$
 $R_0 R \ll 1, e^{-R_0 R} = 1 - R R_0 + \frac{R_0^2}{2} R^2 + \dots$

$$\Rightarrow \text{Lösung: } R(t) = \frac{1}{R_0^2 S(0)} \left[S(0) R_0 - 1 + \alpha \tanh\left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi\right) \right]$$

mit Konstanten α, ϕ

$$\Rightarrow \dot{R}(t) = \frac{\gamma \alpha^2}{2 S(0) R_0^2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \alpha \gamma t - \phi\right)$$

z.B.: $\dot{R} = 890 \operatorname{sech}^2(0.2t - 3.4)$



2.2 SEIR-Modell



"exposed": schon angesteckt, aber noch nicht infektiös \Rightarrow Latenzperiode $\frac{1}{\sigma}$

Gleichungen: $\dot{S} = \mu - (\beta I + \mu) S$

mit $1 = S + E + I + R$

$$\dot{E} = \beta S I - (\mu + \sigma) E$$

$$\dot{I} = \sigma E - (\mu + \gamma) I$$

$$\dot{R} = \gamma I - \mu R$$

Berechne Fixpunkte: (i) krankheitsfrei: $S^* = 1, E^* = I^* = R^* = 0$

(ii) endemisch: $S^* = \frac{1}{R_0}$ mit $R_0 = \frac{(\gamma + \mu)(\sigma + \mu)}{\beta \sigma}$

$$\rightarrow E^* = \frac{\mu(\mu+\sigma)}{\beta\sigma} (R_0-1), \quad I^* = \frac{\mu}{\beta} (R_0-1), \quad R^* = 1 - S^* - E^* - I^*$$

Stabilität durch Berechnung der Eigenwerte der Jacobi-Matrix = Lösung der charakteristischen Gl.

$$0 = \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \lambda & -\beta S^* & 0 & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - 1 & -\mu - \sigma & 0 \\ 0 & -\mu - \sigma & \sigma - 1 & 0 \\ 0 & \nu & 0 & -\mu - 1 \end{vmatrix}$$

Entwicklung nach 4. Spalte:
 $\lambda_1 = -\mu < 0$

$$= (-\mu - 1) \begin{vmatrix} -\beta I^* - \mu - \lambda & -\beta S^* & 0 \\ \beta I^* & \beta S^* - 1 & -\mu - \sigma \\ 0 & -\mu - \sigma & \sigma - 1 \end{vmatrix}$$

$$= \dots = (-\mu - 1) \left[\lambda^3 + (\mu R_0 + 2\mu + \sigma + \nu) \lambda^2 - \mu R_0 (\sigma + \nu) \lambda + \mu (R_0 - 1) (\mu + \sigma) (\mu + \nu) \right]$$

Einsetzen von endemischen Fixpunkt

$$\approx (-\mu - 1) \underbrace{(1 + \nu + \nu)}_{\lambda_2 = -\nu - \nu < 0} \left[\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \frac{\nu\sigma}{\sigma + \nu} \mu (R_0 - 1) \right]$$

Vgl. SIR: $\lambda^2 + \mu R_0 \lambda + \mu (R_0 - 1) (\nu + \mu)$

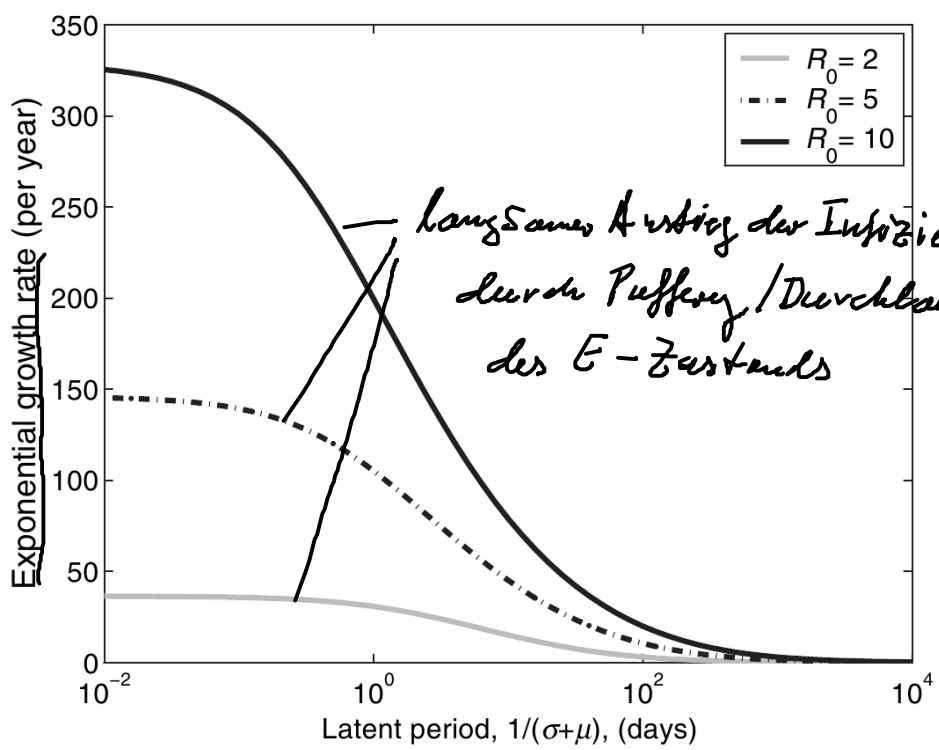
$$\Rightarrow \lambda_{3,4} = -\frac{\mu R_0}{2} \pm \frac{\sqrt{(\mu R_0)^2 - \frac{4}{A\sigma}}}{2} \quad \text{mit} \quad A = \frac{1}{\mu (R_0 - 1)}$$

$\sigma = \frac{1}{\mu + \nu} + \frac{1}{\mu + \sigma}$ neu im SEIR-Modell

Fazit: $\lambda_1 = -\mu, \lambda_2 = -\nu - \nu, \lambda_{3,4} = -\frac{\mu R_0}{2} \pm \frac{i}{\sqrt{A\sigma}}$

$\mu R_0 \text{ klein}$

$\Rightarrow T = 2\pi \sqrt{A\sigma}$



Parameter: $\mu^{-1} = 70a$
 $\nu^{-1} = 10d$

