

English Summary

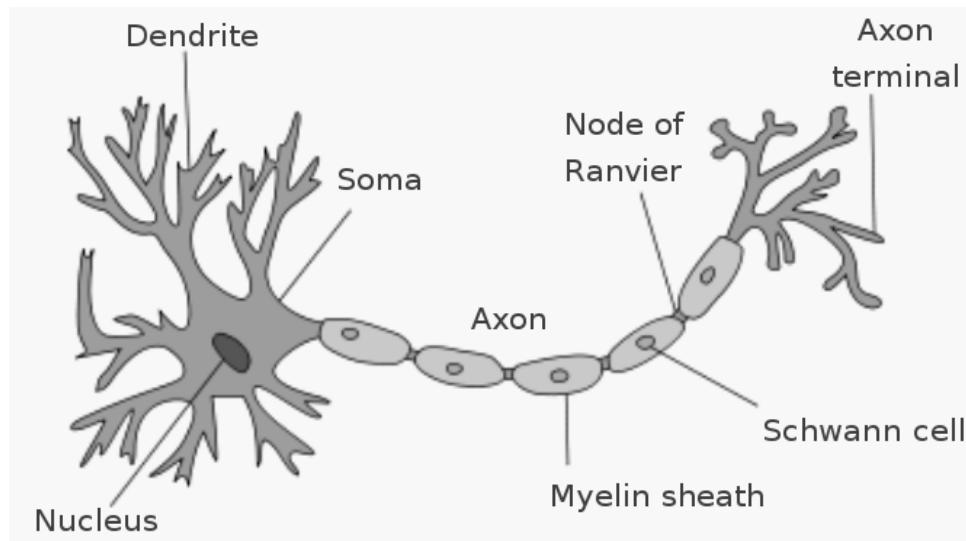
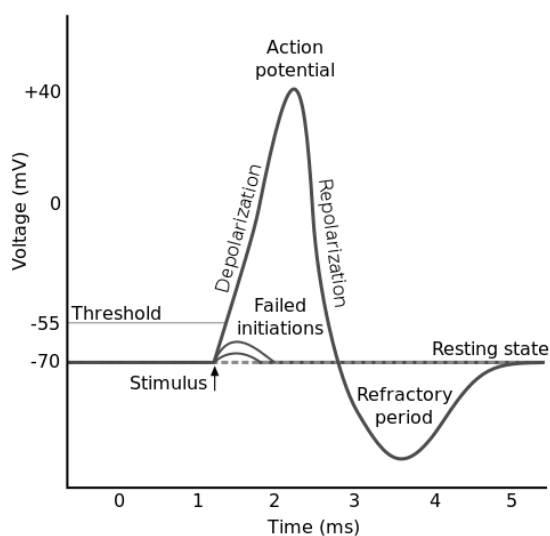
1. Introduction

The (human) brain consists of $\approx 10^{11}$ neurons connected via $\approx 10^{15}$ synapses

crossing different scales: spatial $\rightarrow 10\text{cm}, \dots, 10\mu\text{m}$ and below

temporal $\rightarrow \text{years}, \dots, \mu\text{s}$ and below

dynamics of a single neuron: a action potential



1.1 Dynamical systems: Fundamentals

notation $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t)$ \underline{x} : n dynamical variables ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

flow ϕ of vector field: $\phi: \underset{\text{manifold}}{M} \times \underset{\text{time}}{\mathbb{R}} \rightarrow M$ with $\phi(\underline{x}_0, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$ initial condition

fixed points \underline{x}^* of an autonomous dynamical system $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:

$$\dot{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \underline{F}(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \text{Equations to find } \underline{x}^*$$

(linear) stability analysis: eigenvalues (real part) of Jacobian evaluated at \underline{x}^*

$$\delta \underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^* \quad \delta \dot{\underline{x}} \approx \underline{DF}|_{\underline{x}^*} \delta \underline{x} \quad \delta \underline{x} = \sum e^{\lambda t} \underline{\xi} \quad \lambda \underline{\xi} = \underline{DF}|_{\underline{x}^*} \underline{\xi}$$

Fortsetzung: 1.1 Dynamische Systeme: Für weitergehende

allgemein: λ_k Eigenwerte
 $\underline{v}^{(k)}$ Eigenvektoren } der Jacobi-Matrix
durch Aufw. basierend

\Rightarrow allgemeine Lösung: $\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \sum \underline{v}^{(k)} e^{\lambda_k t}$

Stabilitätsbegriffe:

\underline{x}^* heißt stabil (Ljapunov stabil), wenn zu jeder Umgebung U von \underline{x}^* eine Umgebung V von \underline{x}^* existiert, so dass gilt:

$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \quad \forall t \geq 0$



\underline{x}^* heißt asymptotisch stabil, wenn zu \underline{x}^* eine Umgebung U von \underline{x}^* existiert, so dass gilt: $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$ und

$\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U$



U schrumpft mit wachsendem t auf \underline{x}^* zusammen.

Phasenelemente \Rightarrow dynamischen Systemen

Kriterium für (Ljapunov-)Stabilität: Kein Eigenwert von $\underline{DF}|_{\underline{x}^*}$ hat positiven Realteil. ($\lambda_k = 0$ ist erlaubt)

Hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität: Alle Eigenwerte von $\underline{DF}|_{\underline{x}^*}$ haben negative Realteile.

Allgemeines dynamisches System mit $n=2$:

Linearisierung um \underline{x}^* liefert: $\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

Jacobi-Matrix $\underline{DF}|_{\underline{x}^*} =: \underline{A}$

Berechnung des Eigenwerts von \underline{A} : Einheitsmatrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

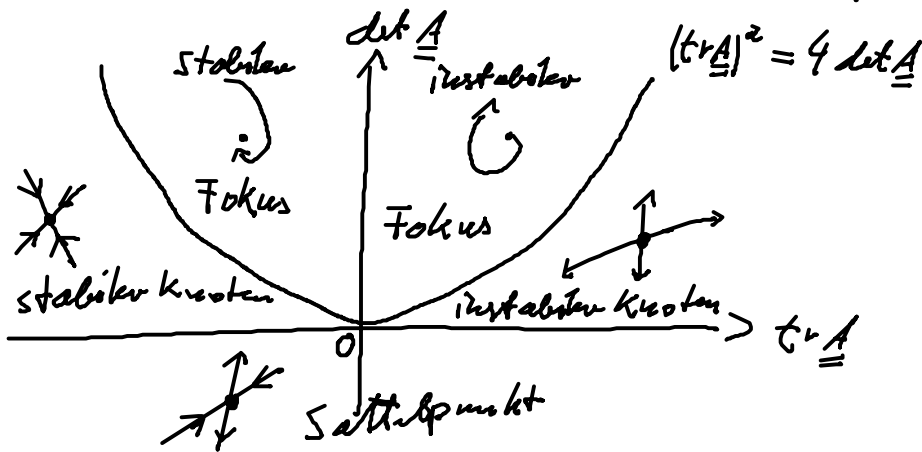
$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \det(\underline{A} - \lambda \underline{1}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - \underbrace{\text{tr} \underline{A}}_{a_{11}+a_{22}} \lambda + \underbrace{\det \underline{A}}_{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \stackrel{!}{=} 0$$

charakteristisches Polynom (Nullstellen = Eigenwerte)

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} \underline{A} \pm \sqrt{(\text{tr} \underline{A})^2 - 4 \det \underline{A}} \right)$$

$$\text{tr} \underline{A} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \text{div} \underline{F}$$



Grenzen: entartete Fälle

$$\text{tr} \underline{A} = 0, \det \underline{A} > 0$$

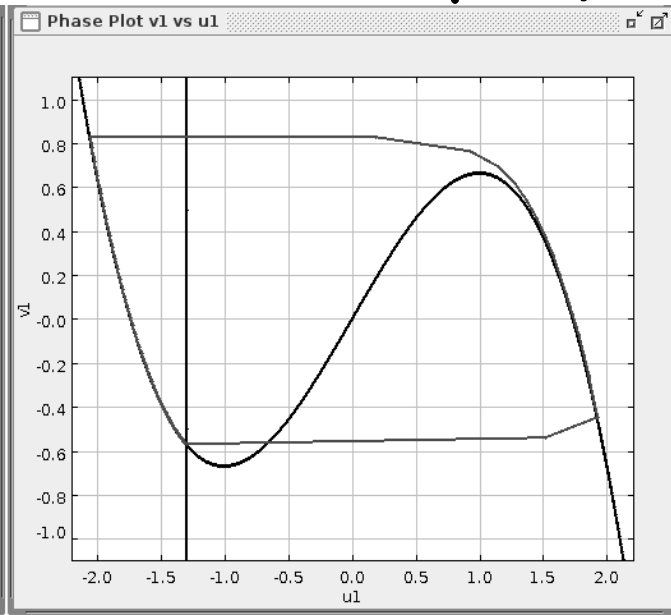
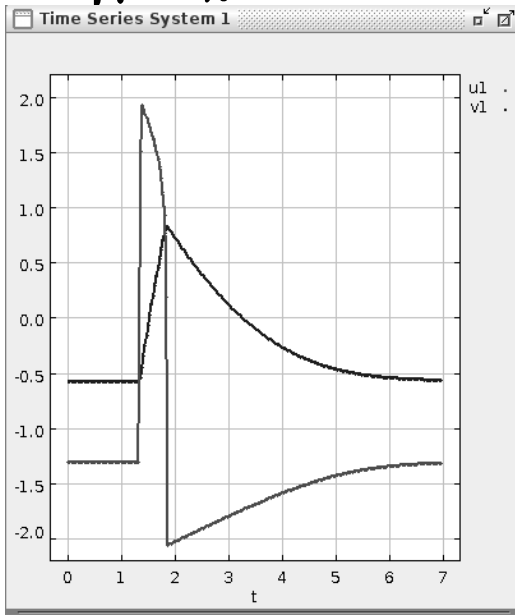
\Rightarrow Zenträum oder schwach stabiler/instabiler Fokus (höhere Terme der Taylor-Entwicklung von $\underline{F}(\underline{x}^*)$ nötig)

qualitative Änderung im Verhalten des Flusses in Abhängigkeit der Systemparameter = Bifurkation (Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit)

1.2 Bifurkationen

Bifurkationszahl & Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert eines Systemparameters ändern.

Hopf-Bifurkation am Beispiel des Fitz-Hugh-Nagumo-Systems:



Pause Restart

Time Scale Separation ϵ_1 0.010

Time Scale Separation ϵ_2 0.010

Threshold Parameter a_1 1.300

Threshold Parameter a_2 1.300

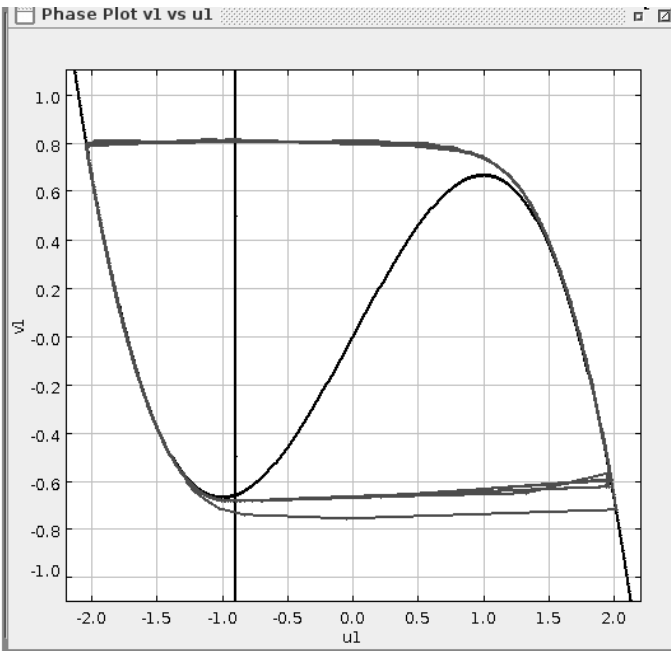
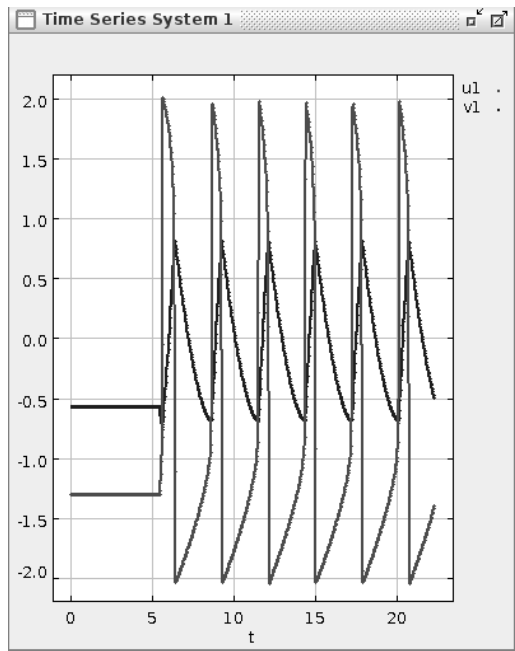
Coupling Strength C 0.000

Coupling Delay τ 0.000

Feedback Strength K 0.000

Feedback Delay τ_K 0.000

Stim Size Δu_1 1.



Pause Restart

Time Scale Separation ϵ_1 0.010

Time Scale Separation ϵ_2 0.010

Threshold Parameter a_1 0.900

Threshold Parameter a_2 1.300

Coupling Strength C 0.000

Coupling Delay τ 0.000

Feedback Strength K 0.000

Feedback Delay τ_K 0.000

Stim Size Δu_1 1.

dynamische Gleichungen:

$$\epsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$\dot{y} = x + a$$

a : Bifurkationsparameter

\Rightarrow bestimmt das dynamische Verhalten

$|a| < 1$ oszillierend (Grenzzyklus)

$|a| > 1$ anregbar (stabiler Fixpunkt)

Bestimmung des Fixpunktes $(x^*, y^*) = (-a, -a + \frac{1}{3}a^3)$ Siehe 1. Vorlesung

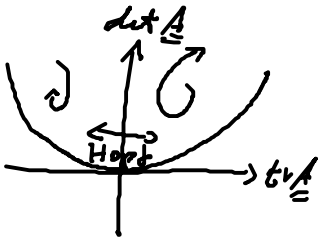
Lineare Stabilitätsanalyse:

$$\begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bigg|_{(x^*, y^*)} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{\epsilon} & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{= \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{DF}}|_{x^*}} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$:

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1-a^2}{\epsilon} - \lambda & -\frac{1}{\epsilon} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - \text{tr} \underline{\underline{A}} \lambda + \det \underline{\underline{A}}$$

$$= \lambda^2 - \frac{1-a^2}{\epsilon} \lambda + \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2\epsilon} \left(1-a^2 \pm \sqrt{(1-a^2)^2 - 4\epsilon} \right)$$



$$\text{tr} \underline{\underline{A}} = \frac{1-a^2}{\epsilon} \begin{cases} > 0 & \text{für } |a| < 1 \\ < 0 & \text{für } |a| > 1 \end{cases}$$

$$\det \underline{\underline{A}} = \frac{1}{\epsilon} > 0$$

Fazit: stabilen Fixpunkt ($\text{Re} \lambda < 0$) für $|a| > 1$ } Bifurkationspunkt $|a| = 1$
 instabilen Fixpunkt ($\text{Re} \lambda > 0$) für $|a| < 1$

$\text{Im} \lambda|_{|a|=1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \Rightarrow$ endliche Frequenz (Anregbarkeit Typ II)

\Rightarrow Der Fixpunkt verliert seine Stabilität in einer Hopf-Bifurkation.
 (2 Eigenwerte/komplex konjugiertes Paar $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ändert Vorzeichen des Realteils)