

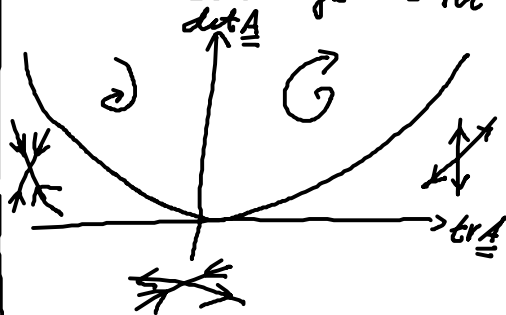
English summary

1.1 Dynamical systems: Fundamentals (continued)

- \underline{x}^* is called (Ljapunov) stable, if for every neighborhood U of \underline{x}^* there is a neighborhood V of \underline{x}^* such that: $\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x}, t) \in U \forall t > 0$
 \Rightarrow no eigenvalues of $\underline{DF}|_{\underline{x}^*}$ with positive real part
- \underline{x}^* is called asymptotically stable, if there is a neighborhood U of \underline{x}^* such that: $\phi(U, t_2) \subset \phi(U, t_1) \subset U$ for $0 < t_1 < t_2$ and $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(\underline{x}, t) = \underline{x}^* \forall \underline{x} \in U$
 \Rightarrow all eigenvalues of $\underline{DF}|_{\underline{x}^*}$ have negative real part.



• linearized systems in $n=2$



$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\text{tr} A \pm \sqrt{(\text{tr} A)^2 - 4 \det A} \right)$$

1.2 Bifurcations

• boundaries (in parameter space) of qualitatively different dynamical regions (# invariant solutions & type/stability change)

• example: Hopf bifurcation in the FitzHugh-Nagumo model

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2\epsilon} \left(1 - a^2 \pm \sqrt{(1 - a^2)^2 - 4\epsilon} \right) \Rightarrow |a| > 1 : \text{stable fixed point}$$

$$\text{Im } \lambda |_{|a|=1} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \quad (\text{finite} \Rightarrow \text{excitability type II})$$

1.2 Bifurkationen (Fortsetzung)

Das Langzeitverhalten dissipativer Systeme wird durch Attraktoren bestimmt.

Def: Sei \underline{F} ein Vektorfeld auf $M = \mathbb{R}^n$

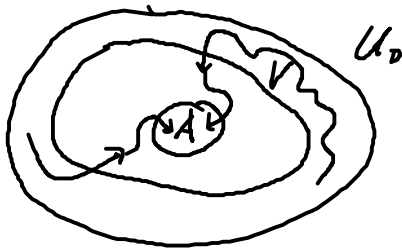
Eine abgeschlossene, unter dem Fluss ϕ_t invariante ($\phi_t(A) \subseteq A$), unzerlegbare

Teilmenge $A \subset M$ heißt Attraktor, falls:

(i) $A \subset U_0$ (offene Umgebung von A) mit $\phi_t(U_0) \subseteq U_0$ ($t > 0$)

(ii) $\forall V$ mit $A \subset V \subset U_0 \exists T > 0$, so dass $\phi_t(U_0) \subset V$ ($t > T$),

d.h. es gibt ein Attraktorbecken U_0 , aus dem der Fluss asymptotisch in den Attraktor läuft.



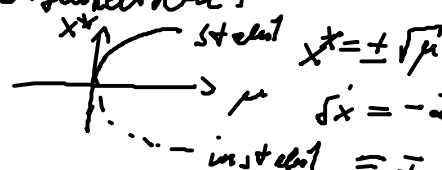
Beispiele:

Mindestdim. in des Phasenraum	Attraktor	Attraktor dimension	
1	stabiler Fixpunkt	0	
2	stabiler Grenzzyklus	1	
3	stabiler Torus	2	
3	seltsamer Attraktor	$2 < d < 3$ (fraktal)	

Klassifikation von Bifurkationen:

(A) Eigenwert-Null-Bifurkationen: $\lambda < 0 \rightarrow \lambda > 0$

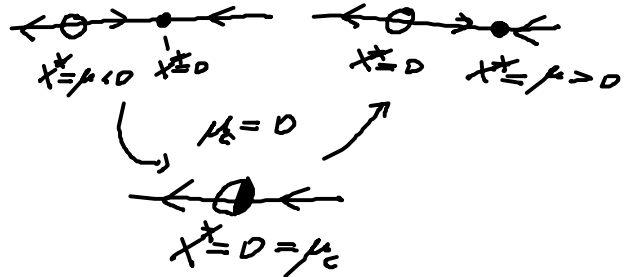
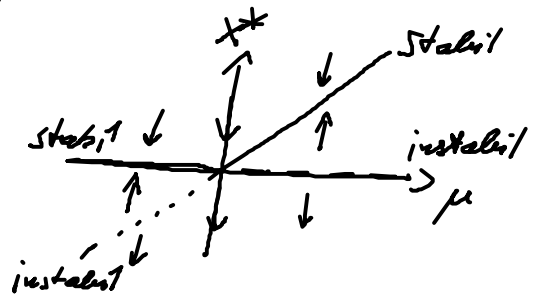
(A1) Sattelnoden-Bifurkation:

$$\dot{x} = \mu - x^2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{stabil } x^* = \pm\sqrt{\mu} \\ \delta x = -2x^* \delta x \\ \text{instabil } = \mp 2\sqrt{\mu} \delta x \end{array} \right\} \Rightarrow \lambda = \mp 2\sqrt{\mu}$$


(A2) Transkritische Bifurkation:

$$\dot{x} = \mu x - x^2 \Rightarrow \delta x = (\mu - 2x^*) \delta x$$

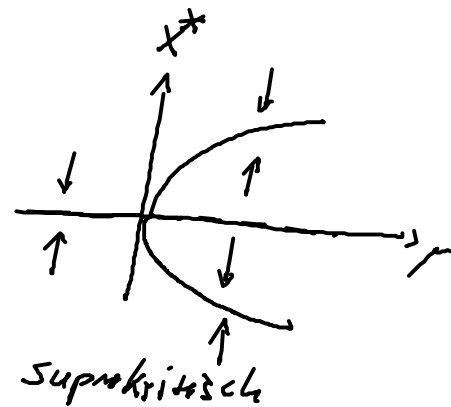
$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \mu \end{cases} \quad \lambda = \begin{cases} \mu \\ -\mu \end{cases}$$



(A3) Stimmungabel/Hengabel-Bifurkation:

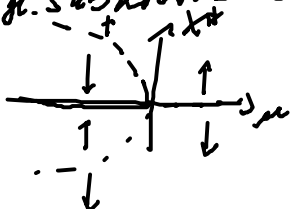
$$\dot{x} = \mu x - x^3 \Rightarrow \delta x = (\mu - 3(x^*)^2) \delta x$$

$$x^* = \begin{cases} 0 \\ \pm\sqrt{\mu} \end{cases} \text{ für } \mu > 0 \quad \lambda = \begin{cases} \mu & \text{stabil für } \mu < 0 \\ -2\mu & \text{stabil für } \mu > 0 \end{cases}$$



$\mu_c = 0$: Entstehung 2 weiterer Fixpunkte

Vgl. subkritische Hengabel-Bifurkation $\dot{x} = \mu x + x^3$
 anderes Vorzeichen!



(B) Hopf-Bifurkation (Andronov-Hopf-Bifurkation)

$n=2$: Eigenwerte des Fixpunktes

$$\lambda_{1,2} = \lambda_0 \pm i\omega$$

$$\lambda_0 < 0 \rightarrow \lambda_0 > 0$$

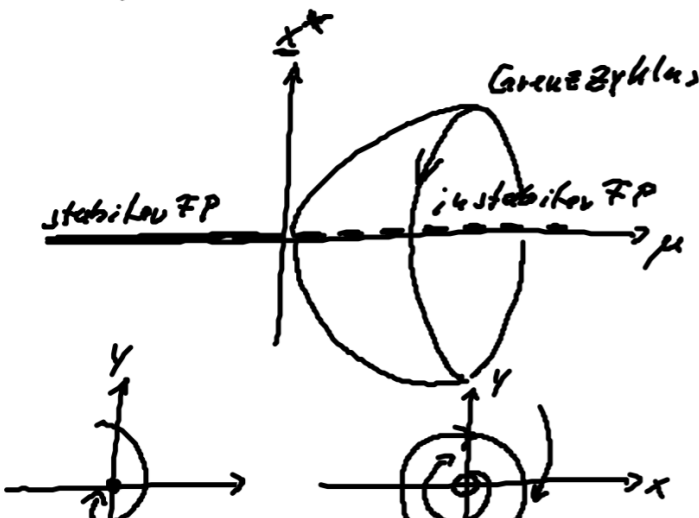
stabiler FP instabiler FP

$$\text{tr} A < 0 \rightarrow \text{tr} A > 0$$



Voraussetzung:

$$\det A > 0$$



stabiler Fokus

instabiler Fokus
+ stabiler Grenzzyklus

$$\dot{z} = (\lambda_0 + i\omega \mp (1+i\gamma) |z|^2) z, \quad z = x+iy \in \mathbb{C}$$

$$z = r e^{i\varphi} \Rightarrow \dot{z} = \dot{r} e^{i\varphi} + i r \dot{\varphi} e^{i\varphi}$$

Stuart-Landau-Oszillator

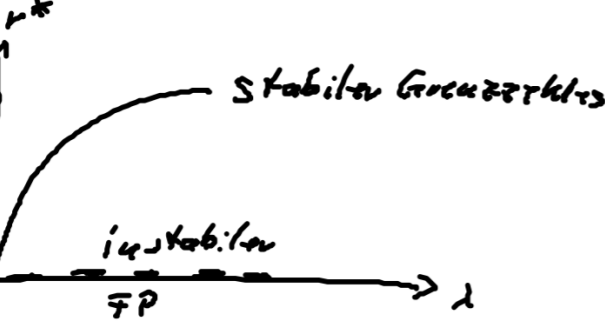
Re: $\dot{r} = (\lambda_0 \mp r^2) r \Rightarrow r^* = 0, (r^*)^2 = \pm \lambda_0$

Im: $\dot{\varphi} = \omega \mp \gamma r^2 \Rightarrow \dot{\varphi}|_{r^*=0} = \omega, \dot{\varphi}|_{(r^*)^2 = \pm \lambda_0} = \omega - \gamma \lambda_0 \Rightarrow \varphi(t) = (\omega - \gamma \lambda_0) t$

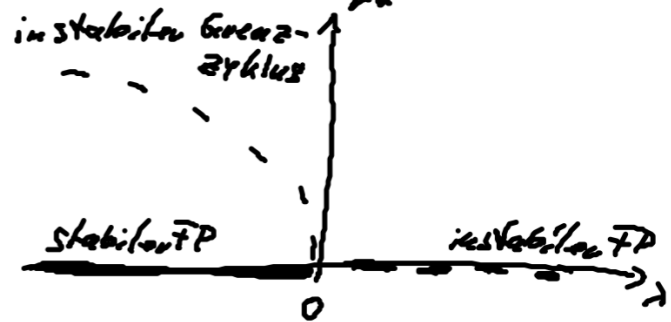
Grenzzyklus mit Amplitude $\sqrt{\pm \lambda_0}$ und Frequenz $\omega - \gamma \lambda_0$

am Bifurkationspunkt $\lambda_0 = 0: r^* = 0, \varphi(t) = \omega t$

Superkritisch



Subkritisch



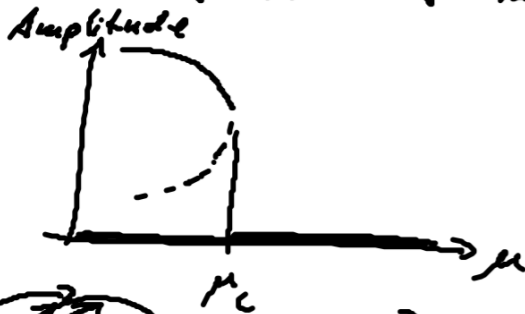
$$\dot{z} = (\lambda + i\omega \ominus (1+i\gamma) |z|^2) z$$

$$\dot{z} = (\lambda + i\omega \oplus (\kappa + i\gamma) |z|^2) z$$

(c) Lokale Bifurkationen eines Grenzzyklus

(c1) Sattel-Knoten-Bifurkation eines Grenzzyklus: $n=2$

(fold bifurcation of a limit cycle, LC)

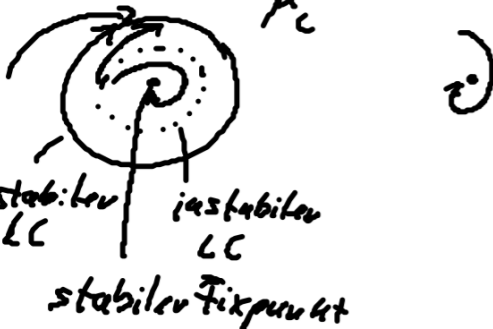
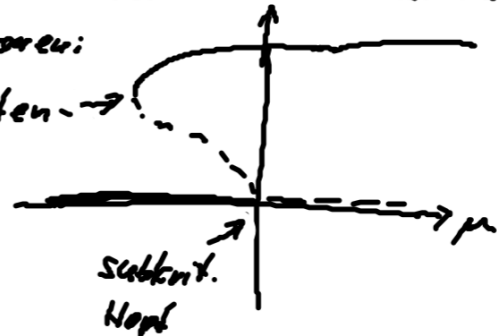


Amplitude $\neq 0$

Frequenz $\neq 0$

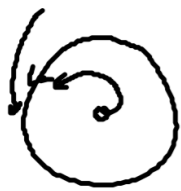
häufig in Kombination mit subkritischen Hopf-Bifurkationen:

Sattel-Knoten-Bif.



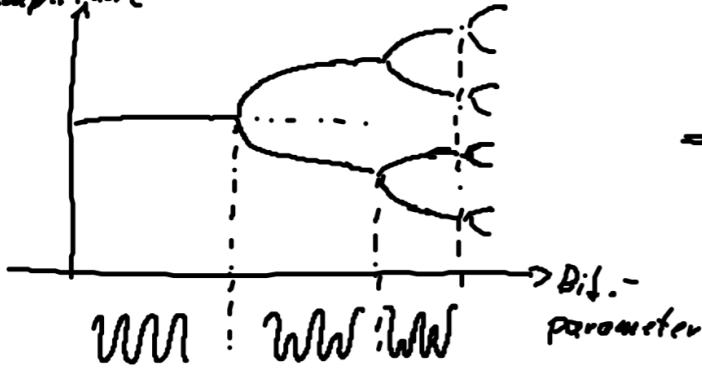
(C2) Perioden-Verdopplung (Flip bifurcation) $n=3$

= Möbiustrand



phase slip π
nach 1 Umlauf
 \Rightarrow Torsion

maximale Amplitude



Perioden: T $2T$ $4T \dots 2^k T$

Floquet-Exponent: $\Lambda = \lambda + i\omega$

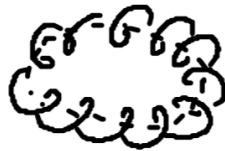
Bifurkation: $\lambda = 0, \omega T = \pi$

\Rightarrow Floquet-Multiplikator: $\mu = e^{\Lambda T} = e^{\lambda T + i\pi} = e^{\lambda T} e^{i\pi} = -1$
Bifurkation

häufig als Periodenverdopplungskaskade
 \Rightarrow Chaos (Feigenbaum-Szenario)

unendlich viele instabile periodische Orbits der Perioden $2^k T$ ($k=0,1,2,\dots$)

(C3) Neimark-Sacker-Bifurkation $n=3$



1. Hopf-Bifurkation des Fixpunktes: $\phi_1 = \omega_1 t$

2. Hopf-Bifurkation des LC: $\phi_2 = \omega_2 t$

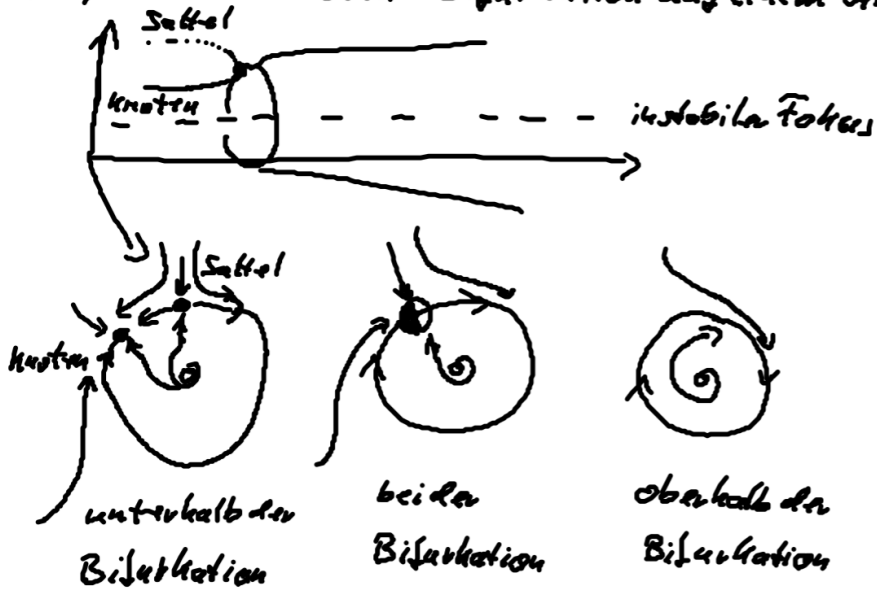
inkommensurable Frequenzen: $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$ (quasiperiodisch)

\Rightarrow Trajektorie schließt sich nicht, liegt dicht auf dem Torus

falls $\frac{\omega_1}{\omega_2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ geschlossener Orbit

(D) Globale Bifurkationen von Grenzübergängen

(D1) Sattel-Knoten-Bifurkation auf einem Grenzzyklus (Onset explosion)



Amplitude $\neq 0$

Frequenz $\rightarrow 0$

(Periode $\rightarrow \infty$)

\Rightarrow Saddle-node infinite period (SNIPER)

saddle-node on invariant cycle (SNIC)