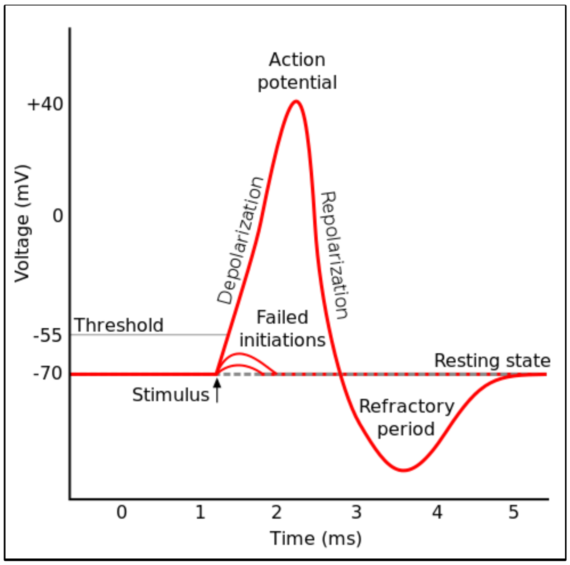
English Summary

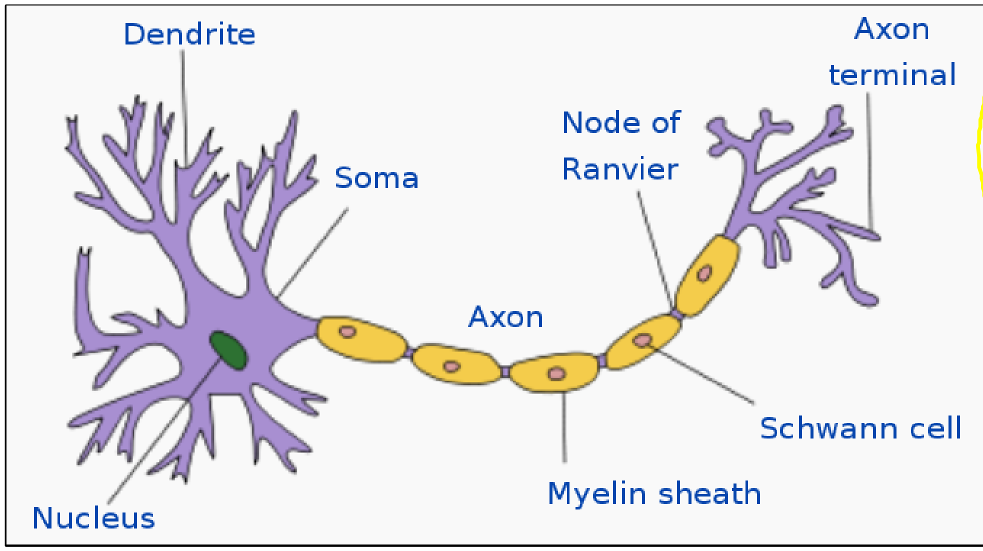
1. Introduction

The (human) brain consists of $\approx 10^{11}$ neurons connected via $\approx 10^{15}$ synapses covering different scales: spatial $\rightarrow$ 10 cm, ..., 10 nm and below

temporal $\rightarrow$ years, ..., ms and below

dynamics of a single neuron: action potential





1.1 Dynamical systems: Fundamentals

notation $\quad \dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x}(t), t) \quad$ $\underline{x}$: n dynamical variables ($\underline{x} \in \mathbb{R}^n$)

$\underline{F}$: vector field

flow ϕ of vector field: $\phi: \overset{\text{manifold}}{M} \times \underset{\text{time}}{\mathbb{R}} \rightarrow M$ with $\phi(\overset{\text{initial condition}}{\underline{x}_0}, t) = \phi_t(\underline{x}_0) = \underline{x}(t; \underline{x}_0)$

fixed point $\underline{x}^*$ of an autonomous dynamical system $\dot{\underline{x}} = \underline{F}(\underline{x})$:

$$\dot{\underline{x}} = 0 \Rightarrow \underline{F}(\underline{x}^*) = 0 \Rightarrow \text{equations to find } \underline{x}^*$$

(linear) stability analysis: eigenvalues (real part) of Jacobian evaluated at $\underline{x}^*$

perturbation: $\delta\underline{x} = \underline{x} - \underline{x}^*$: $\quad \dot{\delta\underline{x}} \approx \underline{\underline{DF}}\big|_{\underline{x}^*} \delta\underline{x} \quad \underset{\delta\underline{x} = \underline{\xi} e^{\lambda t}}{\Longrightarrow} \quad \lambda \underline{\xi} = \underline{\underline{DF}}\big|_{\underline{x}^*} \underline{\xi}$

Fortsetzung: 1.1 Dynamische Systeme: Grundbegriffe

allgemein: λ_k Eigenwerte, $\underline{\xi}^{(k)}$ Eigenvektoren } der Jacobi-Matrix

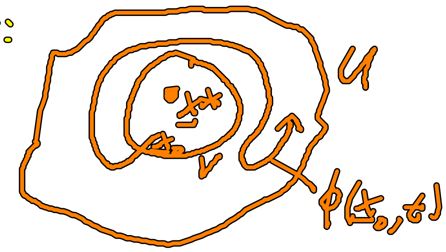
durch Anfangsbed. bestimmt

$\Rightarrow$ allgemeine Lösung: $\delta\underline{x}(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k\, \underline{\xi}^{(k)}\, e^{\lambda_k t}$

<u>Stabilitätsbegriffe</u>:

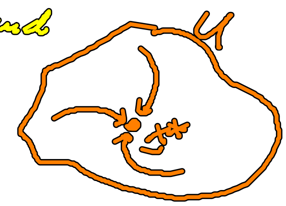
$\underline{x}^*$ heißt **stabil (Ljapunov stabil)**, wenn zu jeder Umgebung U von $\underline{x}^*$ eine Umgebung V von $\underline{x}^*$ existiert, so dass gilt:

$$\underline{x} \in V \Rightarrow \phi(\underline{x},t) \in U \quad \forall t \geq 0 .$$



$\underline{x}^*$ heißt **asymptotisch stabil**, wenn zu $\underline{x}^*$ eine Umgebung U von $\underline{x}^*$ existiert, so dass gilt: $\phi(U,t_2) \subset \phi(U,t_1) \subset U$ für $0 < t_1 < t_2$ und

$$\lim_{t\to\infty} \phi(\underline{x},t) = \underline{x}^* \quad \forall \underline{x} \in U .$$



U schrumpft mit wachsendem t auf $\underline{x}^*$ zusammen.

Phasenraumvolumina schrumpfen $\Rightarrow$ dissipativen Systemen

Kriterium für (Ljapunov-)Stabilität: kein Eigenwert von $\underline{\underline{DF}}|_{\underline{x}^*}$ hat positiven Realteil. ($\lambda_k = 0$ ist erlaubt)

hinreichende Bedingung für asymptotische Stabilität: Alle Eigenwerte von $\underline{\underline{DF}}|_{\underline{x}^*}$ haben negative Realteile.

Allgemeines dynamisches System mit $n=2$:

Linearisierung um $\underline{x}^*$ liefert:

$$\begin{pmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\text{Jacobi-Matrix } \underline{\underline{DF}}|_{\underline{x}^*} =: \underline{\underline{A}}} \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{pmatrix}$$

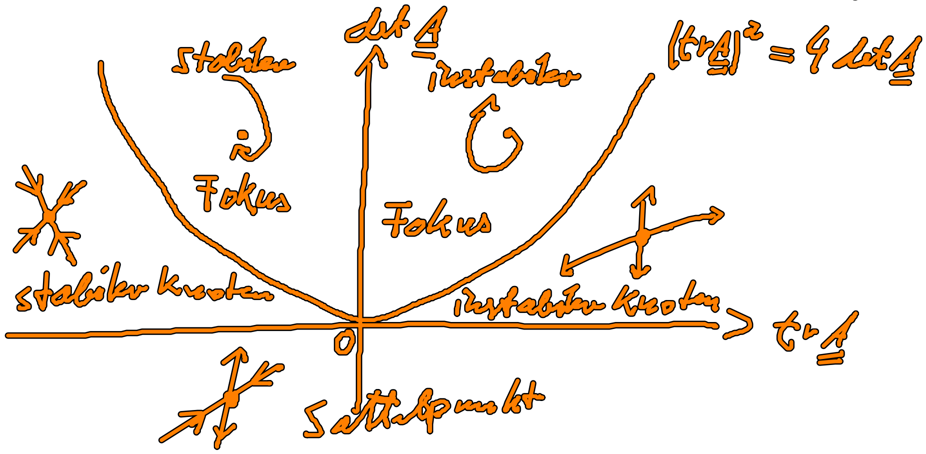
Berechnung der Eigenwerte von $\underline{\underline{A}}$: Einheitsmatrix $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda\end{vmatrix} = \det(\underline{\underline{A}} - \lambda \mathbb{1}) = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21}$$

$$= \underbrace{\lambda^2 - \overset{a_{11}+a_{22}}{\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}}}\;\lambda + \overset{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{\det \underline{\underline{A}}}}_{\text{charakteristisches Polynom}} \stackrel{!}{=} 0$$

(Nullstellen = Eigenwerte)

$$\Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} \pm \sqrt{(\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}})^2 - 4\det \underline{\underline{A}}}\right) \qquad \mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \mathrm{div}\,\underline{F}$$



Grenzen: entartete Fälle

$\mathrm{tr}\,\underline{\underline{A}} = 0$, $\det \underline{\underline{A}} > 0$

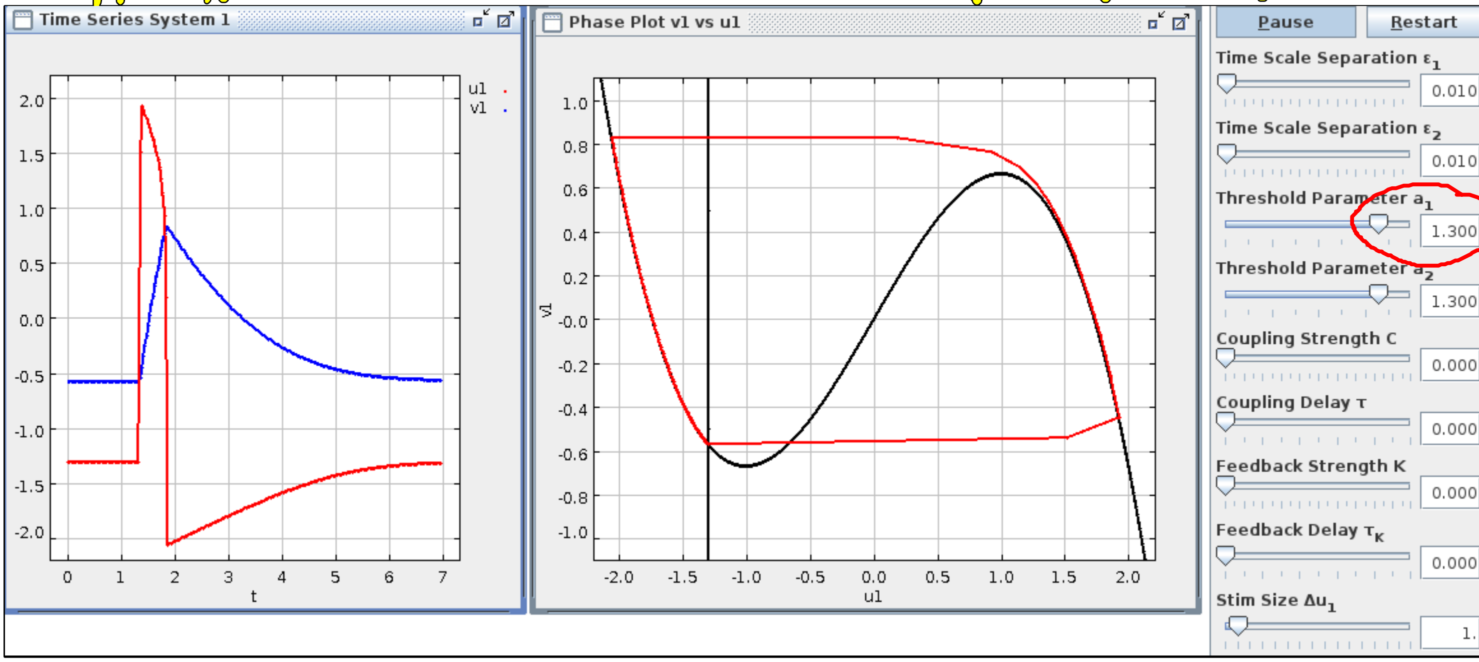
$\Rightarrow$ Zentrum  oder schwach stabiler/instabiler Fokus (höhere Terme der Taylor-Entwicklung von $\underline{F}(\vec{x}^*)$ nötig)

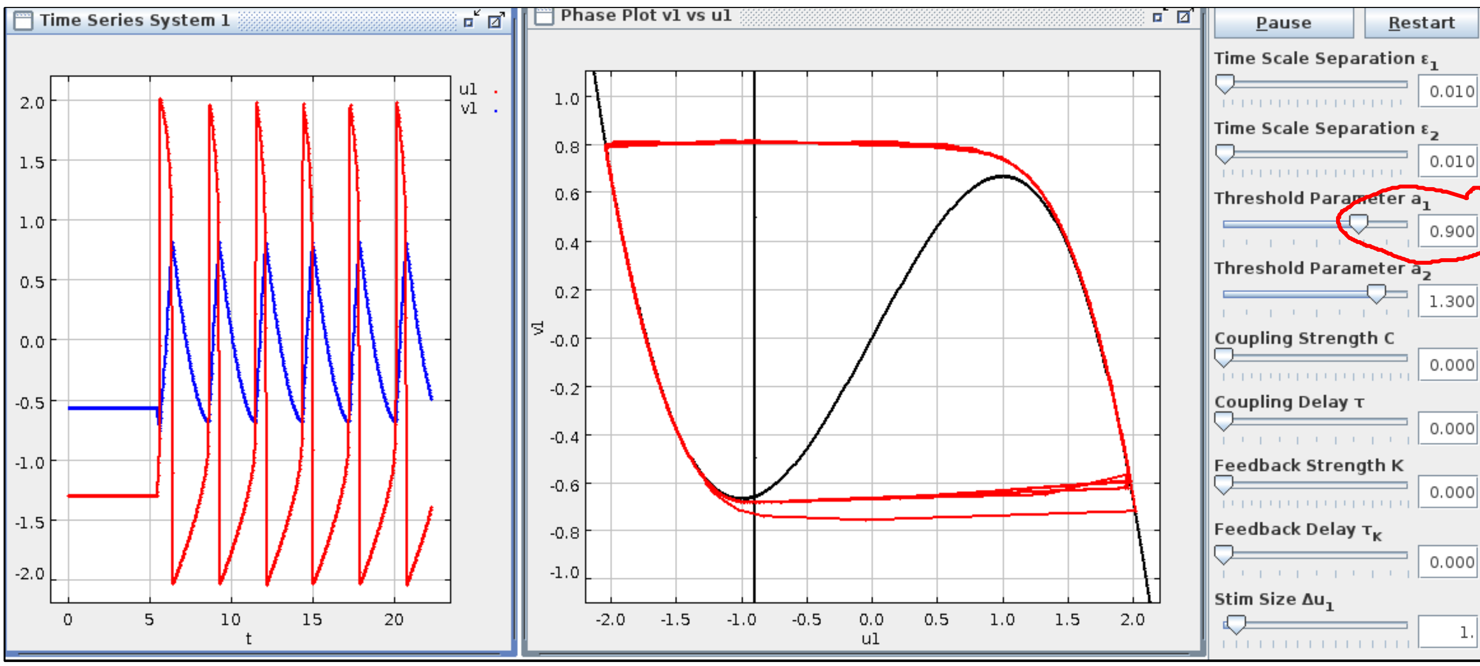
qualitative Änderung im Verhalten des Flusses in Abhängigkeit der System-parameter = Bifurkation (Verzweigung der Lösungsmannigfaltigkeit)

1.2 Bifurkationen

Bifurkationen: Zahl & Art der Attraktoren kann sich schlagartig bei einem kritischen Wert eines Systemparameters ändern.

Hopf-Bifurkation am Beispiel des FitzHugh-Nagumo-Systems:





dynamische Gleichungen:

$$\varepsilon \dot{x} = x - \frac{x^3}{3} - y$$

$$\dot{y} = x + a$$

a: Bifurkationsparameter

⇒ a bestimmt das dynamische Verhalten

$|a| < 1$ oszillierend (Grenzzyklus)

$|a| > 1$ anregbar (stabiler Fixpunkt)

Bestimmung des Fixpunktes $(x^*, y^*) = \left(-a, -a + \frac{a^3}{3}\right)$ Siehe 1. Vorlesung

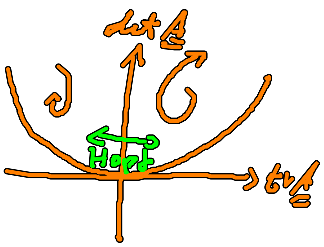
Lineare Stabilitätsanalyse:

$$\begin{pmatrix}\delta\dot{x}\\ \delta\dot{y}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1-x^2}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Bigg|_{(x^*,y^*)} \begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1-a^2}{\varepsilon} & -\frac{1}{\varepsilon}\\ 1 & 0\end{pmatrix}}_{=\underline{A} = \underline{\underline{DF}}\big|_{x^*}} \begin{pmatrix}\delta x\\ \delta y\end{pmatrix}$$

Bestimmung der Eigenwerte von $\underline{A}$:

$$0 = \det\begin{pmatrix}\frac{1-a^2}{\varepsilon}-\lambda & -\frac{1}{\varepsilon}\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix} = \lambda^2 - \mathrm{tr}\,\underline{A}\,\lambda + \det\underline{A}$$

$$= \lambda^2 - \frac{1-a^2}{\varepsilon}\lambda + \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \frac{1}{2\varepsilon}\left(1-a^2 \pm \sqrt{(1-a^2)^2 - 4\varepsilon}\right)$$



$$\mathrm{tr}\,\underline{A} = \frac{1-a^2}{\varepsilon}\begin{cases} > 0 & \text{für } |a| < 1\\ < 0 & \text{für } |a| > 1\end{cases}$$

$$\det\underline{A} = \frac{1}{\varepsilon} > 0$$

Fazit: stabiler Fixpunkt ($\mathrm{Re}\,\lambda < 0$) für $|a| > 1$
instabiler Fixpunkt ($\mathrm{Re}\,\lambda > 0$) für $|a| < 1$ } Bifurkationspunkt $|a| = 1$

$\mathrm{Im}\,\lambda\big|_{|a|=1} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \Rightarrow$ endliche Frequenz (Anregbarkeit Typ II)

$\Rightarrow$ Der Fixpunkt verliert seine Stabilität in einer Hopf-Bifurkation.
(2 Eigenwerte / komplex konjugiertes Paar $\lambda = \alpha \pm i\beta$ ändert Vorzeichen des Realteils)