Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik 25. Oktober 2012
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll,PhD
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

2. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi 7.11.12 14:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.

Aufgabe 3 (10 Punkte): *Maxwell-Bloch-Gleichungen*
Die Maxwell-Bloch-Gleichungen sind (dimensionslose) Ratengleichungen und beschreiben die Dynamik eines Lasers

$$\begin{aligned}\dot{E} &= \kappa(P - E),\\ \dot{P} &= \gamma_1(E\,D - P),\\ \dot{D} &= \gamma_2(\lambda + 1 - D - E\,P).\end{aligned}$$

Hierbei ist E das elektrische Feld der Lasermode, P die mittlere Polarisation im Medium und D die Besetzungsinversion. Der Parameter $\kappa > 0$ ist die Photon-Verlustrate und $\gamma_1 > 0$ und $\gamma_2 > 0$ sind die Zerfallsraten der Polarisation bzw. der Inversion. Der Parameter λ stellt die Pumprate abzüglich des Schwellwerts dar und kann positiv, null oder negativ sein. Nehmen Sie im Folgenden an, dass alle Größen reell sind.
Diese Gleichungen sind äquivalent zu den Lorenz-Gleichungen und zeigen daher kompliziertes dynamisches Verhalten und insbesondere auch Chaos.

1. Finden Sie die Fixpunkte der Gleichungen. Wählen Sie sich einen der Fixpunkte aus und charakterisieren Sie diesen (stabil/instabil, Fokus/Sattel/Knoten). (Tipp: Für einen der Fixpunkte lässt sich die Stabilität besonders einfach bestimmen, da ein Polynom zweiten und nicht etwa dritten Grades zu lösen ist.)

2. Für viele Laser gibt es eine Zeitskalentrennung $\gamma_1, \gamma_2 \gg \kappa$. Damit lassen sich dann P und D adiabatisch wie folgt eliminieren: Nehmen Sie $\dot{P} \approx 0$ und $\dot{D} \approx 0$ an. Leiten Sie damit eine einzelne Differentialgleichung erster Ordnung für E her.

3. Finden Sie für die vereinfachte eindimensionale Gleichung die Fixpunkte E^* und deren Stabilität. Zeichnen Sie ein Bifurkationsdiagramm mit E^* in Abhängigkeit von λ. Benennen Sie dabei alle vorkommenden Bifurkationen.

Aufgabe 4 (10 Punkte): *SNIPER*

In der VL wurde ein einfaches Model einer SNIPER-Bifurkation (**s**addle-**n**ode **i**nfinite **per**iod) diskutiert. In Polarkoordinaten sind die dynamischen Gleichungen gegeben durch

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r(1 - r^2), \\ \dot{\phi} &= b - r\cos\phi. \end{aligned}$$

Im folgenden soll nur die Dynamik von ϕ auf dem Kreis mit $r = 1$ untersucht werden (das geht, weil der Kreis eine invariante Mannigfaltigkeit des Systems ist).

1. Untersuchen Sie die Fixpunkte des reduzierten Systems in Abhängigkeit vom Parameter b (Existenz, Position, Stabilität)

2. Finden Sie die Lösungen $\phi(t)$ durch Trennung der Variablen für $b < 1$ und $b > 1$. Benutzen Sie hierfür

$$\int \frac{d\phi}{b - \cos\phi} = \frac{2}{\sqrt{b^2 - 1}} \arctan\left[\frac{(b+1)\tan\frac{\phi}{2}}{\sqrt{b^2 - 1}}\right] \qquad \text{für} \quad b > 1,$$

$$\int \frac{d\phi}{b - \cos\phi} = \frac{1}{\sqrt{1 - b^2}} \log\left[\frac{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} - \sqrt{1 - b^2}}{(1+b)\tan\frac{\phi}{2} + \sqrt{1 - b^2}}\right] \qquad \text{für} \quad b < 1.$$

3. Plotten Sie für die beiden Fälle $b > 1$ und $b < 1$ die Zeitserien für $x(t) = \cos\phi(t)$ mit geeigneten Anfangsbedingungen.