Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850
15. November 2012

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, Lüdge
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

5. Übungsblatt zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Abgabe: Mi 28.11 14:15 in der Übung. Die Abgabe erfolgt in **2er oder 3er Gruppen**.
Bitte den Source-Code mit ausdrucken.

Aufgabe 9 (10 Punkte): *Euler-Methode für Delay-Differentialgleichungen*

In dieser Aufgabe soll die folgende Delay-Differentialgleichung

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \lambda\, x + \omega\, y - K\,[x(t) - x(t-\tau)],\\ \dot{y} &= -\omega\, x + \lambda\, y - K\,[y(t) - y(t-\tau)],\end{aligned}$$

numerisch gelöst werden.

1. Stellen Sie die charakteristische Gleichung auf und zeigen Sie, dass $K \geq \lambda/2$ eine notwendige Bedingung für die Stabilisierung des Fixpunktes ist.
2. Integrieren Sie das System mit $\lambda = 0.5$ und $\omega = \pi$ numerisch und plotten Sie die Trajektorien für $K = 0$, $K = 0.2$, $K = 0.25$ und $K = 0.3$. Interpretieren Sie Ihr Ergebnis.

Hinweise zur Numerik:

- Das Euler-Verfahren für eine Delay-Differentialgleichung

  $$\dot{X} = f[X(t),\, X(t-\tau)]$$

  ist gegeben durch

  $$X_{n+1} = X_n + dt \cdot f[X_n,\, X_{n-\Delta}],$$

  wobei $\Delta = \tau/dt$.
- Um den Delay-Term auswerten zu können muss die Lösung zwischengespeichert werden. Verwenden Sie für die x und y Variable jeweils ein history-Array der Länge `delta=int(tau/dt)`. Initialisieren Sie diese Arrays mit Nullen und schreiben Sie in die Arrays dann zyklisch die neuen Werte (d.h.: Wenn Sie am Ende angekommen sind fangen Sie von vorne an).
  Tipp: Verwenden Sie die Modulo-Operation %.
- Lassen Sie das System von $t = 0$ bis $t = \tau$ ohne Kontrolle ($K = 0$) laufen, um die history-Arrays zu initialisieren, und schalten Sie dann die Kontrolle ein.
- Speichern Sie die berechneten x und y Werte in entsprechenden Ausgabearrays und plotten Sie dann die Phasenportraits wie in Fig. 1 aus der VL.

Bitte Rückseite beachten!⟶

Aufgabe 10 (10 Punkte): *Optimalkontrolle*
Ein Raum soll von $0°C$ zum Zeitpunkt $t = 0$ auf ungefähr $20°C$ zum Zeitpunkt $t = t_f$ geheizt werden. Die Änderung der Temperatur T wird dabei durch die folgende DGL beschrieben

$$\dot{T}(t) = -aT(t) + bu(t), \quad a, b \in \mathbb{R} \tag{1}$$

wobei a die Wärmeverlustrate ist und $u(t)$ die pro Zeiteinheit zugeführte Wärmemenge.

- Finden Sie das optimale u_*, das das folgende Kostenfunktional minimiert:

  $$\mathcal{I}[T(t), u(t)] = 1/2s(T(t_f) - 20)^2 + 1/2 \int_0^{t_f} u(t)^2 dt, \quad s \in \mathbb{R}$$

  Interpretieren Sie auch die einzelnen Terme von $\mathcal{I}$.

- Finden Sie das zu $u_*(t)$ zugehörige $T_*(t)$, das Gl. (1) löst.

- Falls noch nicht erfolgt: Bestimmen Sie auch alle vorkommenden Integrationskonstanten.