Technische Universität Berlin – Institut für Theoretische Physik
http://www.itp.tu-berlin.de Direktzugang: 78850

8. Dezember 2011

VL: Prof. Dr. Eckehard Schöll, PhD, Dr. Kathy Lüdge
UE: Dipl.-Phys. Judith Lehnert

Projekte zur Nichtlinearen Dynamik und Kontrolle

Durchführung

Die Projekte beinhalten Aufgaben aus verschiedenen Bereichen der nichtlinearen Dynamik und Kontrolle und können nach eigenen Vorstellungen bearbeitet werden (Numerik, Analytik, Zusammenfassung der Literatur, Experimente . . .). Die in jeder Projektbeschreibung aufgeführten Punkte können als Leitfaden dienen, Sie können aber auch in Absprache mit den BetreuerInnen eigene Ideen verfolgen.
Die Projekte sind so konzipiert, dass die Bearbeitung mit der angegebenen Literatur und dem Wissen aus der Vorlesung möglich ist.
Zur vollständigen Bearbeitung gehören folgende Punkte:

1. Bearbeitung des Projekts in Zweier- oder Dreiergruppen
2. Präsentation der Ergebnisse in einem 15 minütigen Kurzvortrag (+5 Minuten Diskussion) am 9.2 oder 10.2.12. Wichtig ist hierbei in erster Linie die verständliche Darstellung. Beschränken Sie sich deshalb auf die zum Verständnis wesentlichen Punkte.
3. Abgabe einer schriftlichen Ausarbeitung mit vollständiger Dokumentation der Lösungswege und vollständigen Quellenangaben bis 17.2.12. Auch hier steht die Verständlichkeit und übersichtliche Darstellung im Vordergrund. Der Umfang der Ausarbeitung soll fünf bis zehn Seiten umfassen.

Während der gesamten Bearbeitungszeit stehen Ihnen die BetreuerInnen des jeweiligen Projektes für Fragen zur Verfügung. Bitte machen Sie individuell Termine mit den Betreuern aus.

Projekt 1: *Netzwerke und Klima*

Betreuer: Judith Lehnert, Thomas Isele (`tommaso@itp.tu-berlin.de`, ER 238)

Im Rahmen der Klimaforschung gibt es seit kurzem Bestrebungen, die Zusammenhänge verschiedener Einflussfaktoren durch Ableiten von Netzwerkstrukturen zu analysieren [1]. Als Grundlage dafür dienen Messdaten und meteorologische Aufzeichnungen, die über einen Zeitraum von mehreren Jahrzehnten zur Verfügung stehen.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Erklären Sie, wie aus Messdaten ein Netzwerk abgeleitet werden kann.
- Diskutieren Sie verschiedene Kenngrößen, die ein Netzwerk charakterisieren (Grad eines Knotens, durchschnittliche Verbindung, Cluster-Koeffizienten etc.). Bringen Sie diese Kenngrößen mit dynamischen Charakteristika in Verbindung.
- Diskutieren Sie Stärken und Schwächen dieser Herangehensweise.
- Nennen Sie Beispiele klimatischer Vorgänge und deren Auftreten in Netzwerkanalysen.

Literatur

[1] R. V. Donner, Y. Zou, J. F. Donges, N. Marwan, and J. Kurths: *Recurrence networks: a novel paradigm for nonlinear time series analysis*, New J. Phys. **12**, 033025 (2010).

Projekt 2: *Small-world Netzwerke*

Betreuer: Judith Lehnert

Unter den vielen verschiedenen Arten von Netzwerken spielen die sog. *small-world* Netzwerke eine zentrale Rolle [1, 2, 3, 4]. Sie zeichnen sich durch kurze Wege zwischen den Elementen und einen hohen Cluster-Koeffizienten aus. Ihre charakteristische Struktur ist in unterschiedlichen Bereichen nachgewiesen worden, wie zum Beispiel in biologischen oder sozialen Netzwerken. In sozialen Netzwerken zeigt sich die *small-world* Eigenschaft in dem Phänomen, dass jeder Mensch mit jedem anderen über höchstens sechs Verbindungen miteinander bekannt ist.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Diskutieren Sie verschiedenen Kenngrößen, die ein Netzwerk charakterisieren (Grad eines Knotens, durchschnittliche Verbindung, Cluster-Koeffizienten etc.). Unterscheiden Sie dabei vor allem zwischen zufälligen, regulären und *small-world* Netzwerken.
- Wie können *small-world* Netzwerke erzeugt werden?
- Nennen Sie mindestens drei Beispiele aus unterschiedlichen Gebieten, wo *small-world* Netzwerke zu finden sind.
- Diskutieren Sie die Anfälligkeit eines Netzwerks in Hinblick auf seinen vollständigen Zusammenhang unter dem Einfluss von zufälligem oder koordiniertem Ausfall von Netzwerkelementen.
- Berechnen Sie für ein mindestens 100 Knoten großes Netzwerk die mittlere kürzeste Weglänge und den Cluster-Koeffizienten. Finden Sie einen möglichst effizienten Algorithmus. Vergleichen Sie ihr Ergebnis mit dem analytischen Ausdruck für Cluster-Koeffizienten [4] und vollziehen Sie die Herleitung dieses Ausdruckes nach.

Literatur

[1] D. J. Watts and S. H. Strogatz: *Collective dynamics of 'small-world' networks*, Nature **393**, 440 (1998).

[2] M. E. J. Newman: *The structure and function of complex networks*, SIAM Review **45**, 167 (2003).

[3] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang: *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**, 175 (2006).

[4] R. Albert and A.-L. Barabási: *Statistical mechanics of complex networks*, Rev. Mod. Phys. **74**, 47 (2002).

Projekt 3: *Synchronisation in Netzwerken: Master stability function*

Betreuer: Judith Lehnert, Thomas Dahms (`dahms@itp.tu-berlin.de`, ER246)

In vielen natürlichen und technischen Netzwerken tritt Synchronisation auf: Im Gehirn ist Synchronisation Bestandteil vieler kognitiver Prozesse, kann aber auch pathologisch werden, beispielsweise bei Parkinson oder Epilepsie. Zur Anwendung in der Kryptographie wird chaotische Synchronization von Lasern untersucht.
Die hohe Dimension des Phasenraums – bedingt durch die große Anzahl von Knoten– macht numerische Untersuchungen der Stabilität schnell aufwändig. Die *master stability function* (MSF) erlaubt die Reduzierung auf ein System von der Dimension eines einzelnen Netzwerkknoten [1, 2, 3] und ermöglicht es so, Dynamik und Topologie getrennt zu betrachten.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Berechnen Sie die MSF für ein System aus N gekoppelten logistischen Maps

$$x^i_{k+1} = r x^i_k (1 - x^i_k) + \sigma \sum_{j=1}^{N} G_{ij} x^j_k, \quad i = 1, \dots, N. \tag{1}$$

  Betrachten Sie den Fall $0 = \sum_{j=1}^{N} G_{ij}$ und wählen Sie drei verschiedene Werte für r: $r < 2.999$ (vor der ersten Periodenverdopplung), $2.999 < r < 3.569$ (Bereich der Periodenverdopplungen) und $r > 3.569$ (Chaos).

- Informieren Sie sich über *circulant matrices* . Berechnen Sie die Eigenwerte der Kopplungsmatrizen für Systeme mit N Einheiten, die in folgender Art gekoppelt sind:
  1. *unidirektionaler Ring*: Die Elemente sind unidirektional (in eine Richtung) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
  2. *bidirektionaler Ring*: Die Elemente sind bidirektional (in beide Richtungen) im Ring miteinander verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
  3. *all-to-all coupling*: Jedes Element ist mit jedem Anderen verbunden. Alle Kopplungsstärken sind gleich.
- Geben Sie für die drei r-Werte jeweils ein Beispiel für Netzwerke mit mindestens drei Elementen an (Zeilensumme 0), für die die Synchronisation stabil bzw. instabil ist. Tragen Sie dazu die Eigenwerte $\sigma\gamma_k$ der Matrix σG in den entsprechenden Plot der MSF ein. Simulieren Sie die Beispiele direkt und überprüfen Sie so Ihr Ergebnis.

Literatur

[1] L. M. Pecora and T. L. Carroll: *Master stability functions for synchronized coupled systems*, Phys. Rev. Lett. **80**, 2109 (1998).

[2] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D. U. Hwang: *Complex networks: Structure and dynamics*, Physics Reports **424**, 175 (2006).

[3] J. Lehnert: *Dynamics of Neural Networks with Delay*, Master's thesis, Technische Universität Berlin (2010).

Projekt 4: *Chaos in Booleschen Netzwerken*

Betreuer: Thomas Dahms (dahms@itp.tu-berlin.de, ER246), Judith Lehnert

Boolesche Dynamik kann als Modell für verschiedene Prozesse in Natur und Technik dienen, in denen es ausreicht, den Zustand eines Systems durch „an“ oder „aus“ bzw. durch 0 oder 1 darzustellen. Beispiele sind z.B. logische Schaltkreise oder Genregulierungsnetzwerke.
Netzwerke aus wenigen Booleschen Elementen können trotz des einfachen Aufbaus der Knoten hochgradig chaotische Dynamik zeigen, wenn Verzögerungszeiten zwischen den Knoten eingeführt werden [1, 2].
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch. Lesen Sie dazu die Referenzen [1, 2] und relevante Vorarbeiten.
- Durch die Unstetigkeit der Booleschen Dynamik lässt sich das Konzept der Lyapunov-Exponenten nicht einfach anwenden. Diskutieren Sie das Konzept der Booleschen Distanz und des daraus entstehenden Lyapunov-Exponenten.
- Implementieren Sie numerisch ein Netzwerkmotiv aus drei Knoten mit Boolescher Dynamik und variablen Verzögerungszeiten
    1. ohne weitere Annahmen für die Knoten,
    2. mit (i) Abhängigkeit von der Richtung des Schalten und (ii) short-pulse rejection,
    3. mit (i) Abhängigkeit von der Richtung des Schalten, (ii) short-pulse rejection und (iii) degradation.
- Diskutieren Sie die drei Effekte (i-iii) mit Hinblick auf die Beschreibung realer nichtidealer Boolescher Schaltelemente.
- Zeigen Sie mit Simulationen die verschiedenen Arten der Dynamik in den drei Fällen (1-3). Berechnen Sie Lyapunov-Exponenten mit Hilfe der Booleschen Distanz und diskutieren Sie die Ergebnisse.

Literatur

[1] R. Zhang, H. L. D. de S. Cavalcante, Z. Gao, D. J. Gauthier, J. E. S. Socolar, M. M. Adams, and D. P. Lathrop: *Boolean chaos*, Phys. Rev. E **80**, 045202 (2009), arXiv:0906.4124.

[2] H. L. D. de S. Cavalcante, D. J. Gauthier, J. E. S. Socolar, and R. Zhang: *On the origin of chaos in autonomous Boolean networks*, Phil. Trans. R. Soc. A **368**, 495 (2010).

Projekt 5: *Frontausbreitung in einer bistabilen chemischen Reaktion*

Betreuer: Eckehard Schöll, Thomas Isele (`tommaso@itp.tu-berlin.de`, ER 238)

Das Schlögl-Modell ist ein einfaches paradigmatisches Modell für ein bistabiles nichtlineares System [1, 2, 3, 4]. Es beschreibt einen Nichtgleichgewichtsphasenübergang erster Ordnung zwischen zwei stationären Zuständen und tritt bei chemischen Reaktionen der folgenden Art auf:

$$
\begin{aligned}
A + 2X \quad &\underset{k_2}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} \quad 3X \\
A \quad &\underset{k_3}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} \quad X
\end{aligned}
$$

wobei X und A chemische Spezies sind und k_1, k_2, k_3, k_4 Reaktionsraten. Die Konzentration von A wird konstant gehalten, wogegen die Konzentration von X variabel ist.
Bearbeiten Sie folgende Punkte:

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Stellen Sie die Übergangsraten für die Reaktion auf. Leiten Sie die Mastergleichung her.
- Leiten Sie die Ratengleichungen für die mittlere Konzentration x von X her und diskutieren Sie die stationäre Lösung. Falls Bistabilität vorliegt, kann es in einem räumlich ausgedehnten System mit Diffusion zu Koexistenz der zwei stationären Lösungen kommen. Leiten Sie die *equal area rule* (Maxwell-Konstruktion) für die räumliche Koexistenz her. Wenn die *equal area rule* verletzt ist, ist der eine Zustand metastabil, der andere ist stabil und entspricht einem globalen Minimum des Potenzials $V(x)$ der Ratengleichung $\dot{x} = -V(x)$. Zeigen Sie, dass das zeitabhängige räumliche Profil eine Propagationsfront aufweist, die einem Übergang zu diesem Zustand entspricht. Leiten Sie die Geschwindigkeit der Front her.
- Bestimmen Sie die stationäre Wahrscheinlichkeitsverteilung als Lösung der Mastergleichung. Vergleichen Sie die Bedingung gleicher Wahrscheinlichkeiten der zwei stationären Zustände mit der *equal area* Konstruktion und diskutieren Sie, warum dies zwei unterschiedliche Bedingungen gibt.

Literatur

[1] C. W. Gardiner: *Handbook of Stochastic Methods for Physics, Chemistry and the Natural Sciences* (Springer, Berlin, 2002).

[2] F. Schlögl: *Chemical reaction models for non-equilibrium phase transitions*, Z. Phys. **253**, 147 (1972).

[3] H. K. Janssen: *Stochastisches Reaktionsmodell für einen Nichtgleichgewichts-Phasenübergang*, Z. Phys. **270**, 67 (1974), 10.1007/BF01676796.

[4] E. Schöll: *Nonlinear spatio-temporal dynamics and chaos in semiconductors* (Cambridge University Press, Cambridge, 2001), Nonlinear Science Series, Vol. 10.

Projekt 6: *Center Manifold Theorem und Normalformanalyse*

Betreuer: Judith Lehnert

In der Nähe von Bifurkationen ist die Dynamik, selbst von hochdimensionalen Systemen, durch wenige Freiheitsgrade bestimmt. Das *center manifold theorem* [1, 2, 3] ermöglicht es, das System auf diese sog. Zentrumsmannigfaltigkeit zur projizieren und dynamische Gleichungen für die dominierenden Freiheitsgrade abzuleiten. Die Gleichungen können dann durch eine Normalformanalyse weiter vereinfacht und auf eine einheitliche Form gebracht werden.
Dadurch wird es möglich, jeden Bifurkationstyp auf eine Standardform zu bringen (die in der VL behandelt wurden).

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Diskutieren und erklären Sie das center manifold theorem und betrachten Sie die folgenden Beispiele
  - Sattel-Knoten-Bifurkation
  - Pitchfork-Bifurkation
  - Hopf-Bifurkation
- Diskutieren Sie die Normalformanalyse anhand der Beispiele.

Hinweise: *Dieses Projekt ist für mathematisch Interessierte.*

Literatur

[1] J. Argyris, G. Faust, M. Haase, and R. Friedrich: *Die Erforschung des Chaos* (Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010).

[2] J. Guckenheimer and P. Holmes: *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields* (Springer, Berlin, 1986).

[3] S. Wiggins: *Introduction to applied nonlinear dynamical systems and chaos* (Springer Verlag, 2003).

Projekt 7: *Entstehung skalenfreier Netzwerke*

Betreuer: Kathy Lüdge

Viele uns umgebende Netzwerke (z.B. das Internet oder das Flugliniennetz) zeigen skalenfreie Eigenschaften [1]. Dabei bezieht sich die Bezeichnung "skalenfrei" auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Knotengrades (Zahl der Verbindungen zu anderen Knoten). In diesem Projekt sollen Wachstums-Modelle diskutiert werden, die zur Entstehung solcher skalenfreier Netzwerke führen.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Machen Sie sich vertraut mit den Kenngrößen, die ein Netzwerk charakterisieren (Grad eines Knotens, durchschnittliche Verbindung, Cluster-Koeffizienten etc.). Gehen sie dabei besonders auf die Wahrscheinlichkeitsverteilung des Knotengrades für verschiedene Netzwerke (zufällige, reguläre und skalenfreie Netzwerke) ein
- Zeigen Sie, dass beim Wachstumsmodell von Price oder von Barabasi und Albert [2] ein skalenfreies Netzwerk entsteht. Stellen Sie dazu die Mastergleichung auf und lösen diese.
- Diskutieren sie mögliche Modifizierungen der Modelle und deren Einfluss auf die resultierenden Potenzgesetzverteilungen. Was kann man daraus über reale Netzwerke lernen?

Literatur

[1] A.-L. Barabási and E. Bonabeau: *Scale-free networks*, Sci. Am. **288**, 50 (2003).

[2] M. E. J. Newman: *The structure and function of complex networks*, SIAM Review **45**, 167 (2003).

Projekt 8: *Halbleiterlaser mit optischer Injektion*

Betreuer: Benjamin Lingnau (`lingnau@mailbox.tu-berlin.de`, EW629), Kathy Lüdge

Halbleiterlaser sind nichtlineare dynamische Systeme, die man schon mit wenigen Variablen gut beschreiben kann. Wird ein externes optisches Signal in einen Laserresonator eingekoppelt, zeigt der Laser je nach Art des Signals vielfältige dynamische Phänomene [1]. Ein spezielles Phänomen ist das sogenannte Phasenlocking, dabei kommt es zu einer Synchronisierung der Laserfrequenz mit der Frequenz des injizierten E-Felds [2]. Für kleine Injektionsstärken lässt sich dies als Spezialfall eines periodisch getriebenen Phasenoszillators auffassen, der sich mit der sogenannten Adlergleichung beschreiben lässt [3].

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Diskutieren Sie das Modell und die Variablen, die zur Beschreibung eines Halbleiterlasers verwendet werden.
- Leiten Sie die Adlergleichung als Grenzfall aus den Lasergleichungen mit optischer Injektion her und vergleichen Sie die daraus gewonnen Ergebnisse mit dem tatsächlichen Verhalten eines optisch injezierten Halbleiterlasers. Führen Sie eine Stabilitätsanalyse für die Adlergleichungen durch und klassifizieren Sie die auftretenden Bifurkationen.

Literatur

[1] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rep. **416**, 1 (2005).

[2] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).

[3] R. Adler: *A study of locking phenomena in oscillators*, Proc. IEEE **61**, 1380 (1973).

Projekt 9: *Asymptotische Analyse der Dynamik eines optisch injizierten Lasers*

Betreuer: Kathy Lüdge

Ein Laser, der durch externes Licht gestört (oder kontrolliert) wird, zeigt eine Reihe interessanter nichtlinearer Eigenschaften [1]. Ein Grenzfall, der für dieses nichtlineare System analytisch betrachtet werden kann, ist der Fall kleiner Injektionsstärke. Für diesen Fall lassen sich mit Hilfe asymptotischer Methoden analytische Lösungen für einige auftretende Bifurkationen finden.

- Führen Sie eine Literaturrecherche zu diesem Thema durch.
- Bestimmen Sie ausgehend von den vollen Gleichungen für kleine Injektionsstärken das Nullte-Ordnungs-Problem und bestimmen Sie aus den Fixpunkten den Punkt der Sattel-Knoten-Bifurkation [2]. Stellen Sie die Bedingungen für eine Hopf-Bifurkation auf und bestimmen Sie diese ebenfalls analytisch.
- Erstellen Sie aus den Ergebnissen ein zwei-Parameter-Bifurkationsdiagramm (Injektionfrequenz, Injektionsstärke) und vergleichen Sie die analytischen Ergebnisse mit numerischen Simulationen des vollen Systems.

Literatur

[1] S. Wieczorek, B. Krauskopf, T. Simpson, and D. Lenstra: *The dynamical complexity of optically injected semiconductor lasers*, Phys. Rep. **416**, 1 (2005).

[2] T. Erneux and P. Glorieux: *Laser Dynamics* (Cambridge University Press, UK, 2010).