7.4 Volumenintegrale

- Motivation: Gesamtmasse M der Erde?

  Schalenstruktur:
  (i) unterschiedliches Material
  (ii) Inhomogenitäten in der Schale

$$\longrightarrow M \approx \sum_i \underbrace{m(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Masse von}\\ \text{Vol. } \Delta V_i \text{ am}\\ \text{Ort } \underline{r}_i}} = \sum_i \underbrace{\varrho(\underline{r}_i)}_{\substack{\text{Massendichte}\\ \text{Skalarfeld!}}} \Delta V_i$$

für genaue Berechnung: $\Delta V_i \to dV \to 0$

- Def:

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{Volumenintegral über Skalarfeld } f(\underline{r}) \text{ im}\\ \text{Volumen } V:\\ \displaystyle\int_V f(\underline{r})\, dV \xleftarrow{\Delta V_i \to dV} \sum_{\text{"}i\in V\text{"}} f(\underline{r}_i)\, \Delta V_i\end{array}} \quad (7.24)$$

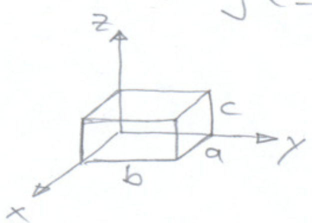
NB: (1) $f(\underline{r})$ ... "Dichte"
(2) $f(\underline{r})$ ... (kartesische) Komp. eines Vektorfeldes

- kartesische Koordinaten:

$$\boxed{dV = dx\, dy\, dz} \quad (7.24)$$ ... Volumen eines infinitesimal kleinen Quaders

Bsp: (1) Berechne Vol. eines Quaders mit Kantenlängen a, b, c

$\longrightarrow f(\underline{r}) = 1$



$$V_Q = \int_{V_Q} dV = \underbrace{\int_{z=0}^{c}\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a} dx\, dy\, dz}_{\text{3-fach Integral}}$$

$$\overset{\text{"faktorisiert"}}{=} \underbrace{\int_{z=0}^{c} dz \int_{y=0}^{b} dy \int_{x=0}^{a} dx}_{\text{Produkt von 3 1D-Integralen}} = a\,b\,c \checkmark$$

(2) komplizierter Rand ∂V von $V \longrightarrow$ HM

• <u>beliebige Koord</u> x_1, x_2, x_3:

(1) Koord. trafo: $\underline{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\text{kartes. Koord}} = \begin{pmatrix} x(x_1, x_2, x_3) \\ y(\quad " \quad) \\ z(\quad " \quad) \end{pmatrix}$ (7.25)

(2) Welches Volumen entspricht $dx_1\, dx_2\, dx_3$ (Bsp: $\underbrace{dr\, d\vartheta\, d\varphi}_{\text{Einheit Länge!}}$ → Vorfaktor?)

Verschiebungsvektor für dx_i:

$$d\underline{r}^{(i)} = \underbrace{\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_i}}_{\sim \underline{e}_i \,!!} dx_i = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial x_i} dx_i \qquad (7.26)$$

→ Spatprodukt!

$$dV = d\underline{r}^{(1)} \cdot \left(d\underline{r}^{(2)} \times d\underline{r}^{(3)}\right)$$

$$\overset{(7.26)}{=} \frac{\partial r}{\partial x_1} \cdot \left(\frac{\partial r}{\partial x_2} \times \frac{\partial r}{\partial x_3}\right) dx_1\, dx_2\, dx_3 \qquad (7.27)$$

(3) Führe ein:

Jacobi-Matrix: $$\boxed{\underline{\underline{F}} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)} = \left(\frac{\partial \underline{r}}{\partial x_1}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_2}, \frac{\partial \underline{r}}{\partial x_3}\right)} \qquad (7.28)$$

Spaltenvektoren

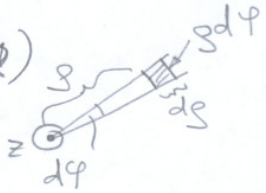
$$\xrightarrow[\text{mit } (7.28)]{(7.27)} \boxed{\begin{aligned} dV &= \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x_1,x_2,x_3)}\right| dx_1\, dx_2\, dx_3 \\ &= \underbrace{\det \underline{\underline{F}}}_{\text{Funktionaldeterminante}} \; dx_1\, dx_2\, dx_3 \end{aligned}} \qquad (7.29)$$

<u>Bsp</u>: (1) Zylinderkoord: $x_i = \rho, \varphi, z$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\cos\varphi \\ y &= \rho\sin\varphi \\ z & \end{aligned}\right\} \longrightarrow \underline{\underline{F}} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (7.30)$$

$$\longrightarrow \det \underline{\underline{F}} = 1\rho(\cos^2\varphi - (-)\sin^2\varphi)$$
$$= \rho \qquad (7.31)$$

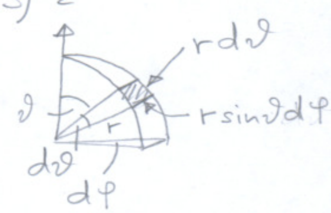
$$\longrightarrow \boxed{dV = \underbrace{\rho\, d\rho\, d\varphi}_{\text{Grundfläche}} \times \underbrace{dz}_{\text{Höhe}}} \qquad (7.32)$$



(2) Kugelkoord.: $x_i = r, \vartheta, \varphi$

$$\longrightarrow \det \underline{E} = r^2 \sin\vartheta \quad (7.32)$$

$$\longrightarrow \boxed{dV = \underbrace{r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}_{\substack{\text{Grundfläche auf} \\ \text{Kugelschale} \\ \text{(vgl. (7.19))}}} \times \underbrace{dr}_{\text{Höhe}}} \quad (7.33)$$



- Bsp: Volumen V_k einer Kugel mit Radius R

$\longrightarrow$ Kugelkoord mit $f(\underline{r}) = 1$ in (7.24)

$$V_k = \int_{V_k} dV = \underbrace{\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr}_{\text{3-fach Integral}}$$

$$= \underbrace{\left(\int_0^R r^2 dr \right)}_{\frac{r^3}{3}\Big|_0^R = \frac{R^3}{3}} \underbrace{\left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right)}_{2\pi} \underbrace{\left(\int_0^{\pi} \sin\vartheta \, d\vartheta \right)}_{\int_{-1}^{1} d\cos\vartheta = 2}$$

$$= \frac{4\pi}{3} r^3 \quad !$$