Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
27. Juni 2007

11. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Divergenz,Gradient in Kugelkoordinaten*

(a) Zeigen Sie, daß die Divergenz $\mathrm{div}(\mathbf{V}) = \nabla \cdot \mathbf{V}$ eines Vektorfeldes $\mathbf{V} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\mathrm{div}(\mathbf{V}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial r^2 V_r}{\partial r} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial \sin(\vartheta) V_\vartheta}{\partial \vartheta} + \frac{1}{r\sin(\vartheta)}\frac{\partial V_\varphi}{\partial \varphi}.$$

Hinweis: Es gilt $\mathbf{V} = V_r\mathbf{e}_r + V_\varphi\mathbf{e}_\varphi + V_\vartheta\mathbf{e}_\vartheta$. Beachten Sie, daß die Basisvektoren ortsabhängig sind, d.h. die Ableitungen ungleich Null sind.

(b) Zeigen Sie, daß der Laplaceoperator $\nabla^2 U = \nabla \cdot \nabla U = \mathrm{div}(\mathrm{grad}(U))$ (U Skalarfeld) in Kugelkoordinaten gegeben ist durch

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial U}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial U}{\partial\vartheta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}$$

Wir wissen, daß sich das Kraftfeld der Gravitation $\mathbf{F}_G$ durch ein Potential U darstellen läßt, so daß gilt $F_G = -\nabla U$. Desweiteren wird die Kraft durch eine Massedichte ρ hervorgerufen, d.h. $\mathrm{div} F_G \sim -\rho$. Somit erhalten wir für das Gravitationspotential die Gleichung (Poisson-Gleichung)

$$\nabla^2 U = \gamma\rho.$$

(c) Bestimmen Sie eine Lösung der Gleichung $\nabla^2 U = \rho_0 = const$ mit einem kugelsymetrischen Ansatz, d.h. für $U = U(r)$ ($r =$ Abstand vom Ursprung). Diskutieren Sie die Lösung.

Aufgabe 2 : *Rotation von Feldern (mündlich)*
Bestimmen Sie die Rotation in kartesischen Koordinaten der folgenden Vektorfelder

(a) $\mathbf{w}(x,y,z) = \begin{pmatrix} yz\cos(xyz) + 2xz \\ xz\cos(xyz) + 2yz^2 \\ xy\cos(xyz) + x^2 + 2y^2 z \end{pmatrix}$

(b) $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\rho}\mathbf{e}_\varphi$

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 3 : *Rotation, Divergenz (mündlich)*
Zeigen Sie die Gültigleit folgender Identitäten:

(a) $\nabla \times (\phi \mathbf{a}) = \phi(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla \phi) \times \mathbf{a}$
(ϕ ist ein skalares Feld)

(b) $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a})) - \triangle \mathbf{a}$

(c) $\nabla \times (\nabla \phi) = 0$

(d) $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$

Hinweis:
Verwenden Sie den total antisymmetrischen Tensor ϵ_{ijk}.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 702, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708

- **Übungsschein:** Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedern sich in drei Teile: Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden. Am Ende des Semesters wird es eine Klausur geben. Die Klausur gilt als bestanden, wenn mehr als 50 Prozent erreicht werden.Werden 30 Prozent erreicht besteht die Möglichkeit an einer Nachklausur bzw. an einer Rücksprache teilzunehmen.

- **Klausurtermin:** Die Klausur findet am 20.7.2007 um 14.00 Uhr im H01058 statt.