Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
5. Juli 2007

12. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe freiwillig: Dies ist ein Bonusblatt zur Wiederholung und Klausurvorbereitung. Die Aufgaben können sowohl mündlich als auch schriftlich bearbeitet werden. Erzielte Punkte gelten als Zusatzpunkte.

Aufgabe 1 : *Vektorräume und Polynome*

Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}^n[0,\infty]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[0,\infty]$ und definieren folgende Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}^n[0,\infty] \times \mathcal{P}^n[0,\infty] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

$$(p,q) := \int_0^\infty p(x)q(x)\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt in dem Vektorraum der Polynome bildet.

(b) Überprüfen Sie, ob die Basis $\{1, x, x^2\}$ des $\mathcal{P}^2[0,\infty]$ orthogonal ist. Falls nicht, überführen Sie diese Funktionen mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in ein Orthogonalsystem.

Aufgabe 2 : *Koordinatensysteme*
Wir definieren die Koordinaten (λ, φ, ψ) $(\lambda \in \mathbb{R}; \varphi, \psi \in (-\pi, +\pi))$ durch

$$x = \mathrm{e}^\lambda \cos\varphi,$$
$$y = \mathrm{e}^\lambda \sin\varphi,$$
$$z = \tan\psi,$$

wobei (x, y, z) die kartesischen Koordinaten bezeichnen.

(a) Berechnen Sie die Koordinatenbasis.

(b) Berechnen Sie die Skalarprodukte von den Basisvektoren.

(c) Berechnen Sie den Gradienten $grad(U)$ in diesen Koordinaten.

Aufgabe 3 : *Spiralen*

Eine logarithmische Spirale läßt sich am einfachsten in Polarkoordinaten angeben:

$$r(\varphi) = \mathrm{e}^{k\varphi} \qquad \text{mit} \quad k > 0$$

(a) Geben Sie eine Parameterform in kartesischen Koordinaten an.

(b) Berechnen Sie die Bogenlänge vom Ursprung ausgehend. Geben Sie die Spirale durch die Bogenlänge parametrisiert an.

(c) Berechnen Sie das Skalarprodukt zwischen dem (normierten) Tangentialvektor an die Spirale und den Vektoren der Koordinatenbasis $\mathbf{e}_r$ und $\mathbf{e}_\varphi$. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(d) Wir erzeugen zwei neue Spiralen $r_1(\varphi_1)$ und $r_2(\varphi_2)$ durch Streckung/Stauchung um einen Faktor a (d.h. $r_1 = ar$) und durch Drehung um einen Winkel ψ (d.h.$\varphi_2 = \varphi + \psi$). Vergleichen Sie beide Spiralen.

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 4 : *Vektoranalysis*
Gegeben sind die Skalarfelder

$$\psi_1(\mathbf{r}) = \cos(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}), \tag{3}$$
$$\psi_2(r) = \sin(r) \qquad (r = |\mathbf{r}|). \tag{4}$$

Berechnen Sie die Gradientenfelder $\mathbf{F}_i = \nabla\psi_i$. Berechnen Sie anschließend die Rotation und die Divergenz dieser Vektorfelder.

Aufgabe 5 : *Kreuzprodukt und Rotation*

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Identität gilt

$$rot(rot(rot\mathbf{H}))) = 0,$$

wenn das Vektorfeld $\mathbf{H}$ ein Gradientenfeld, dh. $\mathbf{H} = \nabla\phi$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ senkrecht im Sinne des Standardskalarprodukt zu $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ steht.

Aufgabe 6 : *vollständiges Differential*
Es ist das Skalarfeld U gegeben:

$$U(x,y,z,t) = -\frac{\kappa}{r}$$

Bestimmen Sie das vollständige Differential von U und die totale Zeitableitung, dh. $\frac{dU(\mathbf{r}(\mathbf{t}),t)}{dt}$, wenn die folgende Bahnkurve

$$\mathbf{r}(t) = a(\sin(\omega t), \cos(\omega t), t/t_0)^T$$

gegeben ist.

Aufgabe 7 : *Drehungen und Trägheitstensor*
Ein starrer Körper, besteht aus vier miteinander verbundenen Massepunkten. Die Massepunkte werden als Abstand vom Koordinatenursprung mit Hilfe der folgenden Vektoren beschrieben:

$$\mathbf{r}_1 = (\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2),\ \ \mathbf{r}_2 = (-\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2), \tag{5}$$
$$\mathbf{r}_3 = (2\mathbf{e}_1 + 3\mathbf{e}_2),\ \ \mathbf{r}_4 = -(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_3) \tag{6}$$

Wobei $\mathbf{e}_i$ die Vektoren der Standardbasis bezeichnen.

(a) Bestimmen Sie alle Komponenten des Trägheitstensors, wenn alle Massenpunkte die Masse m haben.

(b) Finden Sie eine Winkelgeschwindigkeit $\boldsymbol{\omega}$, die parallel zum Drehimpuls $L_i = \theta_{ij}\omega_j$ liegt.

(c) Diagonalisieren Sie den Trägheitstensor.

(d) Bestimmen Sie die Eigenvektoren.

(e) Gibt es einen Zusammenhang zwischen den Eigenvektoren und den Drehmatrizen?

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr
- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html
- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 702, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708
- **Klausurtermin:** Die Klausur findet am 20.7.2007 um 14.00 Uhr im H01058 statt.