Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel

19. April 2007

1. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Funktionenräume (schriftlich)*
Wir betrachten die Menge der stetigen reellen Funktionen $\mathcal{C}(\mathbb{R})$. In diesem Raum kann eine Addition und eine skalare Multiplikation wie folgt definiert werden:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad \text{mit } f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), \tag{1}$$

$$(a \cdot f)(x) = a \cdot f(x) \qquad \text{mit } f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}), a \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Diese Definition kann auf noch allgemeinere Funktionen erweitert werden. Die so entstehenden Funktionenräume haben eine große Bedeutung in praktisch allen Gebieten der theoretischen Physik.

(a) Die Funktionen $x_1(t) = \sin(t)$ und $x_2(t) = \cos(t)$ sind Lösungen der Differentialgleichung des harmonischen Oszillators. Zeigen Sie, daß x_1 und x_2 Basisvektoren eines 2-dimensionalen Vektorraums sind.

(b) $\mathcal{P}^n$ Bezeichne die Menge aller Polynome vom Grad n, daß heißt alle Funktionen der Form

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \qquad \text{mit} \quad a_i \in \mathbb{R}\ i = 1 \ldots n. \tag{3}$$

Zeige, daß $\mathcal{P}^n$ ein $(n+1)$-dimensionaler Vektorraum ist, und die Menge

$$\{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$$

eine Basis bildet.

Aufgabe 2 : *Untervektorraum (mündlich)*
Betrachten Sie den Vektorraum der 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{R}$, $V = M_{2\times2}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{pmatrix} u & v \\ w & z \end{pmatrix} | u, v, w, z \in \mathbb{C} \right\}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Menge $H = \left\{ \begin{pmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{pmatrix} | w, z \in \mathbb{C} \right\}$ ein Untervektorraum von V ist.

(b) Zeigen Sie ferner, dass H bezüglich der Matrizenmultiplikation kein Körper ist.

(c) H ist ein 4-dimensionaler Vektorraum. Wählen Sie als Basis die Vektoren mit $(z; w) = \{(1,0); (i,0); (0,1); (0,i)\}$.
Bestimmen Sie die folgenden Produkte aus den Basisvektoren $\{e_i\}_{i=0..3}$: $e_i \cdot e_i$.
Hierbei bezeichnet " · " die Matrizenmultiplikation.
Zusatz: Wie lassen sich die komplexen Zahlen durch die Vektoren e_i erweitern?
Die so entstandene Algebra ist für die Beschreibung von kombinierten Drehungen, insbesondere in der Computergraphik, von grosser Bedeutung.

Aufgabe 3 : *lineare Unabhängigkeit (mündlich)*
Im Vektorraum $\mathbb{R}$ über dem Körper $\mathbb{Q}$ sind $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}\}$ linear unabhängig. Beweisen Sie diese Behauptung.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 10^{15} - 11^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

Bitte wenden ⟶

- **Scheinkriterien:**

  Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich in zwei Teile:

  Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden.

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Di, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708