Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
30. April 2007

2. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Levi-Civita-Tensor und Kreuzprodukt (schriftlich)*

Gegeben sei der total antisymmetrische Tensor 3. Stufe (Levi-Civita-Tensor)

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{falls } (ijk) \text{ gerade Permutation von } (123) \\ -1 & \text{falls } (ijk) \text{ ungerade Permutation von } (123) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Es gilt die Einsteinsche Summenkonvention (über doppelt auftretende Indizes wird von 1 bis 3 summiert).

(a) Zeigen Sie folgenden Relationen

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km} \tag{1}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijn} = 2\delta_{kn} \tag{2}$$
$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6 \tag{3}$$

(b) Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d} \in \mathbb{R}^3$. Dann gilt für die Komponenten des Kreuzproduktes $\mathbf{a} = \mathbf{b}\times\mathbf{c}$ die Beziehung $a_i = \varepsilon_{ijk} b_j c_k$. Zeigen Sie mittels dieser Definition (und der Relation (1)) folgende Identitäten:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{4}$$
$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{5}$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \tag{6}$$
$$0 = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \qquad \text{(Jacobi-Identität)} \tag{7}$$

Aufgabe 2 : *Basis (mündlich)*

(a) Vervollständigen Sie, falls möglich, die folgenden Vektoren $\underline{a}$, $\underline{b}$ zu einer Basis und berechnen Sie daraus eine Orthonormalbasis des R^3: $\underline{a} = (1,1,0)^\dagger$, $\underline{b} = (2,1,1)^\dagger$. Verwenden Sie dafür das folgende Skalarprodukt:

$$(a,b) := \sum_{i=1}^{3} a_i b_i .$$

Hinweis:
Benutzen Sie das Gram-Schmidt-Verfahren aus dem Tutorium.

(b) Zeigen Sie nun explizit, daß die gefundenen (normierten) Vektoren linear unabhängig sind.

(c) Im $\mathbb{R}^3$ seien folgende Vektoren gegeben

$$\vec{a} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bilden sie ein Orthonormalsystem! Verwenden Sie das Skalarprodukt aus Teilaufgabe (a).

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 3 : *Skalarprodukt bei Matrizen (mündlich)*

1. Auf dem Vektorraum der Matrizen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ über $\mathbb{R}$ die folgende Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(A, B) = Spur(AB^T) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{ij}$$

   definiert. Zeigen Sie, dass diese ein Skalarprodukt definiert.

Aufgabe 4 : *Vektoren für Physiker (mündlich)*
Zeigen Sie unter Verwendung der in der Vorlesung angegebenen Definitionen, daß die *Vektoren für Physiker* einen euklidischen Vektorraum aufspannen.
Hinweis:
Zeigen Sie hierfür, dass das in der Vorlesung definierte Skalarprodukt den Axiomen für Skalarprodukte entspricht. Ferner genügt für die Linearität eine geometrische Argumentation.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 10^{15} - 11^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Scheinkriterien:**

  Die Kriterien für die Vergabe eines Übungsscheins gliedert sich in zwei Teile:

  Mindestens 50 Prozent der schriftlichen Übungspunkte (Einzelabgabe). Vorrechnen: Jeder Student kreuzt vor jeder Übung sinnvoll bearbeitete Aufgaben an. In der Übung besteht die Möglichkeit die angekreuzten Aufgaben vorzurechnen. Für den mündlichen Teil des Scheinkriteriums müssen 50 Prozent der mündlichen Aufgaben angekreuzt und zwei Aufgaben vorgerechnet werden.

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Di, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708