Technische Universität Berlin
Institut für Theoretische Physik
Prof. Dr. H. Stark,
Sebastian Heidenreich,
Reinhard Vogel
7. Mai 2007

3. Übungsblatt zur Mathematische Methoden der Physik

Abgabe (Einzelabgabe): Eine Woche nach der Ausgabe im entspechenden Tutorium.

Aufgabe 1 : *Legendre-Polynome (schriftlich)*

Wir betrachten die Menge $\mathcal{P}^n[-1,1]$ der Polynome bis zum Grad n auf dem Intervall $[-1,1]$ (vgl. 1. Übungsblatt) und definieren die folgende Abbildung

$$(\cdot,\cdot) : \mathcal{P}^n[-1,1] \times \mathcal{P}^n[-1,1] \longrightarrow \mathbb{R} \tag{1}$$

$$(p,q) := \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\mathrm{d}x. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, daß die Abbildung $(\cdot,\cdot)$ ein Skalarprodukt in dem Vektorraum der Polynome bildet.

(b) Überprüfen Sie, ob die Basis $\{1, x, x^2, x^3\}$ des $\mathcal{P}^3[-1,1]$ orthogonal ist. Falls nicht, überführen Sie diese Funktionen mit Hilfe des Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren in ein Orthonormalsystem.
Hinweis: Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren für eine Basis $v_1, \ldots, v_n$:

$$u_1 = v_1$$

$$u_k = v_k - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(v_k, u_i)}{(u_i, u_i)} u_i$$

Beginen Sie mit $u_1 = 1$.

(c) Die Legendre-Polynome lassen sich durch folgende einfache Formel darstellen

$$P_k(x) = \frac{1}{2^k k!} \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} \left[(x^2-1)^k\right] \tag{3}$$

Zeigen Sie, daß P_k ein Polynom k-ten Grades ist, und daß P_k und P_l für $k \neq l$ orthogonal sind. Berechnen Sie die Norm.
Zusatz: Geben Sie die Polynome bis zum Grad 3 an und zeichnen Sie diese in ein Diagramm.

Aufgabe 2 : *Drehgruppe(mündlich)*
Zeigen Sie, daß die Menge der Drehungen $\mathbf{O}(3)$ bezüglich der Hintereinanderausführung (Matrixmultiplikation) eine Gruppe bilden.

Bitte wenden $\longrightarrow$

Aufgabe 3 : *Levi-Civita-Tensor, Kreuzprodukt (mündlich)*
Sein $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) &= \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) &= det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d})\mathbf{c} - det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})\mathbf{d} \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= ||\mathbf{a}||^2 ||\mathbf{b}||^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^{\mathbf{2}} \end{aligned} \tag{4}$$

Hinweis:
Die Determinante $det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ ist gegeben durch $det(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k$.

Aufgabe 4 : *Drehmatrix (mündlich)*

In der Vorlesung wurden für die Beschreibung von Drehungen Drehmatrizen eingeführt.

(a) Wie sieht die Drehmatrix für eine Drehung um $\mathbf{e_1}$ mit dem Winkel $\frac{2\pi}{n}, n \in \mathbb{Z}$ aus?

(b) Eine allgemeine Drehung kann durch drei Eulerwinkel beschrieben werden. Bestimmen Sie die allgemeine Drehmatrix $D(\varphi, \vartheta, \psi)$ der Drehung um die Eulerwinkel.

(c) Geben Sie die Drehmatrix für eine Drehung um $\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e_1} + \mathbf{e_2} + \mathbf{e_3})$ an.

- Vorlesung: Fr 8^{15} - 9^{45} Uhr Uhr, PN 203

  Tutorien: Mo 16^{15} - 17^{45} Uhr, Mo 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mo 14^{15}-15^{45} Uhr, Di 12^{15} - 13^{45} Uhr, Mi 10^{15} - 11^{45} Uhr, Do 14^{15}-15^{45} Uhr

- **Kontakt, Inhalte, Übungsblätter etc.:** http://www.itp.tu-berlin.de/8391.html

- **Sprechstunde:** S. Heidenreich Fr, 14.00-15.00 Uhr, PN 703, R. Vogel Do, 11.00-12.00 Uhr, PN 708